УДК 517.01

МЕТОД ОЦЕНКИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СТРУКТУРНОЙ БЕЗОПАСНОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Н. Катулев, Н. А. Северцев

Актуальность. При создании новых динамических систем различного назначения и эксплуатации существующих важное значение имеет проблема обеспечения безопасности их функционирования. Ниже рассмотрим только нелинейные автономные динамические системы.

Из практики известно, что нарушение безопасности функционирования эксплуатируемых систем непосредственно связано с изменением их параметров (из-за возникновения нештатных внешних или внутренних воздействий на системы) и оно может приводить к аварийным или катастрофическим последствиям.

В научном плане нарушение безопасности системы связано с переходом ее из состояния структурной устойчивости в состояние структурной неустойчивости.

Действительно, как известно [1, 2], структурная устойчивость определяется совокупностью собственных значений функциональной матрицы Якоби для правой части системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \tag{1}$$

где $x(t)$ – вектор фазовых координат из R^n, $f : R^n \to R^n$, $f \in C^\infty(R^n)$ – вещественная гладкая удовлетворяющая условию Липшица вектор-функция, зависящая как от фазовых координат, так и от параметров собственно динамической системы.

Уравнение (1) описывает динамику функционирования любой и в общем случае нелинейной многопараметрической динамической системы; собственные значения матрицы Якоби – функции от параметров системы, матрица не вырождена во всей области значений фазовых координат, параметров системы.

Эти утверждения являются непосредственным следствием теоремы Андронова – Понтрягина: *дифференциальное уравнение структурно устойчиво в том и только том случае, если его особенности гиперболические, замкнутые траектории гиперболические, ни одна из траекторий не соединяет седловые точки*.

Определение. Особенность $x^{\text{г}}(t)$ (г – *обозначение особенности*) гиперболическая, если она принадлежит области определения системы (1), $f(x^{\text{г}}(t)) = 0$ и функциональная матрица Якоби $\left(\partial f / \partial x\right)$ в точке $x^{\text{г}}$ имеет k собственных значений с положительной действительной частью и $n-k$ собственных значений с отрицательной действительной частью, $0 < k < n$. Из этого определения следует ***условие и показатель*** структурной неустойчивости динамической системы: система структурно неустойчива, если хотя бы одно из собственных значений матрицы Якоби обращается в нуль.

При этом особенность становится точкой бифуркации – катастрофы. Множество точек бифуркации считаем конечным, количеством особенностей определяем степень структурной неустойчивости.

Таким образом, структурную устойчивость (и неустойчивость) или безопасность функционирования динамической системы непосредственно можно установить на основе выявления особых, критических точек (бифуркаций, особенностей, или катастроф) решений, описывающих ее динамику дифференциальных уравнений (1), или на основе анализа влияния малых в смысле C^1-метрики изменений параметров системы на характер (гладкий, непрерывный, скачкообразный) ее перехода из одного состояния равновесия в другое, в том числе из состояния равновесия, соответствующего штатному режиму функционирования, в недопустимое – нештатное, небезопасное аварийное состояние.

Здесь заметим, что описание динамики функционирования системы в виде (1) охватывает и класс динамических систем, описываемых интегральными уравнениями Вольтерра 2-го рода, и класс систем с распределенными параметрами, описываемых дифференциальными уравнениями с частными производными, так как такие уравнения сводимы к обыкновенным дифференциальным, в общем случае, нелинейным вида (1) уравнениям с применением соответственно операции дифференцирования и операции преобразования Фурье – Лапласа с последующим учетом теоремы Планшереля [3].

Стандартными методами исследования названных критических точек являются методы, основанные на функциях Ляпунова, фазовых портретах, потенциальных функциях и на разложениях силовых функций в ряд Тейлора в окрестности стационарного решения с последующим выводом потенциальной функции («обобщенной» [4]) и канонической формы катастрофы из их конечного числа стандартных типов [4] и/или с последующим интегрированием получаемых уравнений.

Однако методы, использующие потенциальные функции, применимы для градиентных динамических систем, а последние составляют частный класс динамических систем, в том числе и автономных; для построения функций Ляпунова не имеется общего алгоритма; исследование критических точек с помощью фазовых портретов на практике возможно лишь для динамических систем второго порядка; известная теорема Тома – Зимана [4] теории катастроф доказана и применима только для систем, динамика которых описывается потенциалом.

Поэтому существует актуальная проблема оценки структурной устойчивости нелинейных автономных динамических систем, а значит, и показателей безопасности их функционирования, без применения функций Ляпунова, потенциальных функций, фазовых портретов и без замены силовых функций отрезком ряда Тейлора. По результатам оценки должно быть выработано оптимальное решение (управление) по поддержанию системы в состоянии безопасного функционирования.

Цель статьи – разработка метода увода нелинейной автономной динамической системы, описываемой нелинейным векторным дифференциальным уравнением с обыкновенными производными или интегральным, или дифференциальными уравнениями с частными производными, сводимыми к дифференциальным уравнениям с обыкновенными производными, от критических точек (бифуркаций), однозначно обусловливающих переход системы из штатного режима функционирования в небезопасный нештатный режим.

Метод. В основу метода принимаются следующие известные фундаментальные факты [5, 6]:

1. Исходной нелинейной автономной динамической системе уравнений (1) однозначно соответствует линейная сопряженная гамильтонова система

$$\dot{p}_j(t) = -\sum_{i=1}^{n} p_j(t)(\partial f_i(x(t))/\partial x_j),\ \ j = 1,2,...,n, \tag{2}$$

где $(p_1(t), p_2(t),..., p_n(t))$ – вектор сопряженных фазовых координат из R^{*n}.

2. Для решений основной (1) и сопряженной (2) систем невозможны одновременно асимптотически устойчивые положения равновесия и асимптотически устойчивые предельные циклы в

основном R^n и сопряженном R^{*n} фазовых пространствах; динамической устойчивости одной из них однозначно соответствует динамическая неустойчивость другой.

3. Функциональная матрица Якоби сопряженной системы (2) есть взятая с обратным знаком транспонированная функциональная матрица Якоби основной системы (1); собственные значения таких матриц отличаются только знаками – знаки противоположны.

4. К неустойчивым системам неприменимо программное управление, т.е. управление, независящее от текущего состояния системы, на достаточно большом промежутке времени; стабилизация системы возможна лишь с помощью обратной связи по выходу.

5. Обратная связь по выходу есть достаточное условие обеспечения системы как динамической устойчивости по Ляпунову, так и структурной устойчивости по Андронову – Понтрягину: система (1) будет без точек бифуркации. Управление системой (1) по такой обратной связи не нарушает свойство ее автономности и невырожденности ее функциональной матрицы Якоби. Правая часть системы (1) преобразуется к виду $\varphi: R^n \times R^m \times R^k \to R^n$, где $R^m -$ пространство управлений, а $R^k -$ пространство параметров системы.

6. Замкнутости исходной системы по обратной связи однозначно соответствует замкнутость сопряженной.

7. Задача оценки структурной устойчивости как коэффициентная обратная задача для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений в общем случае не имеет однозначного решения.

Для существования единственного решения потребуется введение априорной информации дополнительно к информации, экспериментально измеренной в виде текущих значений фазовых координат как функций времени (решений системы уравнений), и знание погрешностей экспериментальных измерений для получения устойчивого решения (регуляризованного по Тихонову) [7, 8].

Поэтому в основу решения задачи оценки структурной устойчивости нелинейной динамической системы примем теорему Андронова – Понтрягина для сопряженной гамильтоново-понтрягинской системы.

Из таких фактов сформулируем следующую теорему:

Нелинейная автономная динамическая система, описываемая нелинейным обыкновенным векторным дифференциальным уравнением (1) *уводима управлением* $u(t) \in R^m$ *в состояние структурной устойчивости – в безопасное состояние от бифуркаций при введении обратной связи по выходу при условии, что функциональная матрица правой части, сопряженной для* (1) *гамильтоновой системы, не вырождена, не положительно определена, непрерывна вместе со своими производными по совокупности фазовых координат вектора* $x(t)$ *из* R^n *и параметров* $\mu(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_k(t))$ *из* R^k *основной системы и что* $\varphi: R^n \times R^m \times R^k \to, \to R^n$, $m \le k + n$, *удовлетворяет условиям роста* $\|\varphi(x(t), \mu(t), u(t))\| \to \infty$ *при* $\|x(t)\| \to \infty$.

Доказательство. Согласно принципу обратной связи по выходу $x(t)$ разомкнутую исходную нелинейную автономную динамическую систему преобразуем в замкнутую. Последняя будет описываться векторным нелинейным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = \varphi(x(t), \mu(t), u(x(t), \mu(t)),$$

где $u(x(t), \mu(t))$ – вектор входных управляющих воздействий по обратной связи, подлежащий определению в каждый текущий момент времени на основе измерений выхода $x(t)$ и параметров системы $(\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_k(t))$; $\varphi(x(t), \mu(t), u(x(t), \mu(t))$ – непрерывная функция по совокупности своих аргументов вместе со своими производными и удовлетворяет условию Липшица; $\varphi(x(t), \mu(t), u(x(t), \mu(t)) \equiv f(x(t))$ при условиях $\mu(t) \equiv 0$ и $u(x(t), \mu(t)) \equiv 0$ для $\forall t$.

При такой функции при любых непрерывных или кусочно-непрерывных физически реализуемых (ограниченных) управляющих воздействиях $u(t) \in R^m$ удовлетворяются условия теоремы существования решения уравнения исходной системы, а если потребуется учет произвольно заданных начальных условий, то обеспечивается и единственность решения.

Очевидно, можно положить $\mu(t)=(\mu_1(t)=x_{n+1}(t),\mu_2(t)=x_{n+2}(t),\ ...,\ \mu_k(t)=x_{n+k}(t))$ и рассматривать систему уравнений

$$\dot{x}_j(t)=\varphi_j(x(t),u(x(t))),\quad j=1,2,...,n,$$

$$\dot{x}_l(t)=\varphi_l(u(x(t))),\ l=1,2,...,k,\ x(t)\in R^{n+k}.$$

Эта система с обратной связью будет управляема из любого исходного состояния, а значит, и уводима от бифуркации, если она допускает целенаправленное изменение своих координат или, иначе, если выполняются условия непрерывности функций $\varphi_j(x(t),u(x(t))),\ j=1,2,...,n,$ вместе со своими производными по фазовым координатам при всех управляющих воздействиях. Таким условиям функции $\varphi_j(x(t),u(x(t))),\quad j=1,2,\ ...,n,$ удовлетворяют в силу существования, а при задании исходных состояний и единственности решения исходного нелинейного уравнения, т.е. в силу существования для исследуемой системы переходной функции, отличной от нуля при всех ограниченных управляющих воздействиях по обратной связи [9, 10].

Теперь для отыскания управления в зависимости от текущего выхода системы воспользуемся функцией Гамильтона

$$H(p(t),x(t),u(t))=(p^T(t),\varphi(x(t),u(x(t)))),$$

где $p^T(t)$ – вектор-строка размера $n+k$ сопряженных координат гамильтоновой системы, определяющийся из системы

$$\dot{p}(t)=-(p^T(t),\varphi'_x(x(t),u(x(t)))).$$

В этом векторном уравнении $\varphi'_x(x(t),u(x(t)))$ – функциональная $(n+\kappa)\times(n+\kappa)$ матрица линейной сопряженной гамильтоновой системы, которая в силу выбора $u(x(t))$ всегда может быть приведена к неположительно определенной с ненулевым непрерывным определителем Якоби. Заметим, что этой матрице Якоби, как следует из факта 3, однозначно соответствует матрица Якоби исходной системы с обратной связью и что сопряженная система замкнута по своему выходу.

Реализуем теперь возможность выбора $u(x(t))$ при требовании: система должна переводиться из одного состояния, как из любого начального, в любое другое заданное состояние, в том числе из непосредственно предшествующего особому – катастрофическому, в допустимое не особое, при минимальных затратах энергии. Тогда для сопряженной системы соответствующее управляющее воздействие $u^*(x(t))$ должно определяться по выражению

$$u^*(x(t))=\arg\max_{u(x(t))\in U} H(p(t),x(t),u(x(t))),$$

где U – замкнутое множество, а значениями параметров системы являются компоненты вектора

$$\mu(t)=(\mu_1(t)=x_{n+1}(t),\ \mu_2(t)=x_{n+2}(t),...,\ \mu_k(t)=x_{n+k}(t)),$$

определяемые выражением

$$\mu_l^*(t)=x_{n+l}^*(t)=\frac{\partial H(x_j^*(t),x_{n+l}(t),u^*(x_j^*(t),x_{n+l}(t))}{\partial x_l}=0.$$

При оптимальных управлениях $u^*(x(t),x^*(t))=(x_j(t),x_{n+l}^*(t),\ j=\overline{1,n},\ l=\overline{1,k})$ должно выполняться равенство $H(p(t),x^*(t),u^*(x^*(t)))=0$.

Управление $u^*(x(t))$, очевидно, приведет к изменению для сопряженной системы характеристического многочлена ее функциональной матрицы и собственных значений. При этом становится возможным обеспечение непрерывного изменения собственных значений и решения гамильтоновой сопряженной системы без бифуркаций.

В результате же, с учетом того, что функциональная матрица линейной сопряженной системы представляется транспонированной с противоположным знаком относительно матрицы Якоби исходной (основной) нелинейной системы уравнений, а значит, с учетом того, что собственные значения функциональной матрицы линейной сопряженной гамильтоновой системы равны по модулю и противоположны по знаку собственным значениям матрицы Якоби замкнутой исходной нелинейной автономной динамической системы, у решения последней не будет бифуркации; система будет структурно устойчива, ее функционирование безопасно. Что и утверждается теоремой (доказательство завершено).

Однако вследствие того, что исследуемая система описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением, функции $\varphi_l(x(t),u(x(t)))$, $j=1,2,...,n$, априори неизвестны (управление не программное), функция Гамильтона записана по существу в неявной форме, не представляется возможным выполнить ее минимизацию в общем виде и получить аналитические выражения для $p(t)$, $\mu^*(t)$, $u^*(x^*(t))$ и для собственных чисел функциональной матрицы сопряженной системы.

В связи с этим можно воспользоваться только численным анализом на ПЭВМ и формировать управляющие воздействия, непосредственно изменяя параметры динамической системы, а значит, изменяя зависящие от них элементы функциональной матрицы и, как следствие, ее собственные значения, так, чтобы обеспечивались выполнение равенства $H(p(t),x(t),\ u(x(t)))=0$ и положительность собственных значений функциональной матрицы, т.е. чтобы не выполнялись необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости линейной сопряженной гамильтоновой системы или, что то же, чтобы выполнялись при этом условия асимптотической устойчивости основной системы. Одновременно обеспечивается выполнение условия ее структурной устойчивости.

Соответствующие оптимальные воздействия на параметры динамической системы могут быть найдены только прямыми методами оптимизации без вычисления производных функций Гамильтона; в [6] воспользуемся известным методом покоординатного спуска с разностной аппроксимацией градиента по изменяемым в циклическом порядке параметрам $\mu(t)=(\mu_1(t)=x_{n+1}(t),$ $\mu_2(t)=x_{n+2}(t),...,\ \mu_k(t)=x_{n+k}(t))$ как фазовых координат.

Заключение

Развитию теории структурной устойчивости управляемых систем посвящен доклад А. А. Давыдова на конференции «Оптимальное управление и приложения» в МИАН г. Москва 25.09.2013, http//www matnet.ru/kof469.

Изложенный в настоящей статье метод распространяется на исследование структурной устойчивости и показателей безопасности функционирования нелинейных динамических систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными, сводимыми преобразованием Фурье – Лапласа к нелинейным автономным обыкновенным дифференциальным уравнениям, и системами нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода, когда они могут быть сведены к решению нелинейных автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод применим для построения и исследования бифуркационного множества в пространстве параметров автономных нелинейных (и линейных) динамических систем.

Алгоритм применения метода и результаты оценки показателей структурной устойчивости – безопасности функционирования нелинейных автономных динамических систем изложены авторами в [6].

Список литературы

1. Андронов, А. А. Большие системы / А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин // ДАН СССР. – 1937. – Т. 14. – 264 с.
2. Касти, Дж. Большие системы. Связность, сложность и катастрофы / Дж. Касти. – М. : Мир, 1982. – 187 с.
3. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1988. – 362 с.

4. Гилмор, Р. Прикладная теория катастроф / Р. Гилмор. – М. : Мир, 1984. – Т. 2. (R. Gilmore. Catastrophe theory for scientists and engineers / R. Gilmore. – New-York ; Chichester ; Brislane ; Toronto : A Willey-Intersclence Publication, John Wiley and Sons, 1981). – 194 с.
5. Алексеев, В. М. Оптимальное управление / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. – М. : Наука, 1979. – 246 с.
6. Катулев, А. Н. Алгоритм и результаты оценки структурной устойчивости функционирования нелинейных автономных динамических систем / А. Н. Катулев, Н. А. Северцев // Труды международного симпозиума Надежность и качество. – 2016. – № 1. – С. 68–72.
7. Северцев, Н. А. Системный анализ определения параметров состояния и параметры наблюдения объекта для обеспечения безопасности / Н. А. Северцев // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 1. – С. 4–10.
8. Северцев, Н. А. Метод оценки показателей безопасности автономных динамических систем / Н. А. Северцев, А. Н. Катулев // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 1. – С. 17–26.
9. Северцев, Н. А. Метод управления беспилотным летательным аппаратом с определенным запасом живучести / Н. А. Северцев, И. В. Прокопьев // Надежность и качество сложных систем. – 2014. – № 1. – С. 43–49.
10. Северцев, Н. А. Полумарковская модель исследования безопасности систем. Безопасность и надежность системы как объекта, имеющего систему защиты / Н. А. Северцев, А. В. Бецков, Ю. В. Лончаков // Надежность и качество сложных систем. – 2014. – № 1. – С. 2–8.

Катулев Александр Николаевич
доктор технических наук, профессор,
кафедра математического моделирования,
Тверской государственный университет
(170100, Россия, Тверь, ул. Желябова, 33)
E-mail: katulev@mail.ru

Северцев Николай Алексеевич
доктор технических наук, профессор,
начальник отдела безопасности
и нелинейного анализа,
Учреждение Российской академии наук,
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
(119333, Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 40)
E-mail: severcev@mail.ru

Аннотация. В развитие практических аспектов применения теоремы Андронова – Понтрягина о структурной устойчивости динамических систем, описываемых дифференциальными уравнениями, изложены принципиальные основы определения показателей безопасности функционирования нелинейных автономных динамических систем гамильтонова типа и построен метод их оценки.

Ключевые слова: автономная динамическая система, безопасность, структурная устойчивость, метод оценки.

Katulev Aleksandr Nikolaevich
doctor of technical science, professor,
sub-department of mathematical simulation,
Tver State University
(170100, 33 Zheljabova street, Tver, Russia)

Severtsev Nikolay Alekseevich
doctor of technical scienses, professor,
head of department of safety and nonlinear analysis,
Dorodnicyn Computer Center
of the Russian Academy of Sciences
(119333, 40 Vavilov street, Moscow, Russia)

Abstract. To extension of Andronov – Pontryagin's theorem by structural stability dynamical systems in this article principles are elaborated for definition of indexes for safety of function of nonlinear autonomous dynamic systems of different fixing which regarding to systems Hamilton's type. Method is created for estimation these indexes.

Key words: autonomous dynamic system, safety, structural stability, method of estimating.

УДК 517.01
Катулев, А. Н.
Метод оценки показателей структурной безопасности функционирования нелинейных автономных динамических систем / А. Н. Катулев, Н. А. Северцев // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 2 (14). – С. 3–8.