

Э. В. Лапшин

**ГАРМОНИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙЧАТАЯ  
ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЛАГРАНЖА ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ  
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АВИАЦИОННЫМ ТРЕНАЖЕРАМ**

E. V. Lapshin

**HARMONIC APPROXIMATION AND PIECEWISE-RULED LAGRANGE  
INTERPOLATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES  
AS APPLIED TO AIRCRAFT EQUIPMENT**

**Аннотация.** Модульное построение технических средств обучения вновь ставит вопрос о проблемно ориентированных вычислительных методах для тренажеров и компьютеризации профессиональной подготовки. Сюда можно отнести варианты методов, излагаемых в статье. Новый метод быстрой кусочно-линейной интерполяции на разреженной равномерной или неравномерной сетке ориентирован на функции многих переменных (до 8–10 и более). Его недостатки с лихвой окупаются вычислительной экономичностью, создающей возможность имитировать важные эффекты, в частности, в критических режимах полета. Метод решения многоэкстремальных многомерных задач позволяет быстро осуществлять сложную параметрическую оптимизацию. Некоторое продвижение достигнуто в задачах синтеза имитаторов физических факторов полета. Для задач моделирования в технических средствах обучения точность исходных массивов данных обычно невысока. Главным достоинством гармонического (спектрального) представления выражения аппроксимирующей функции является возможность формализованного анализа образа (топологии) функции с позиций необходимой детальности описания. Такой формализованный анализ требуется и для применения других более удобных методов аппроксимации (в том числе метода кусочно-линейного интерполирования на разреженной сетке). При этом максимальные ошибки кусочно-линейной интерполяции могут составлять единицы процентов. Дальнейшее обоснование подобных правил задания дискретности сетки будет изложено применительно к кусочно-линейчатой и кусочно-линейной интерполяции функций многих аргументов. Заметим, что тригонометрическая модель аппроксимируемой функции имеет еще одно положительное качество. Ввиду ортогональности базисных функций она удобна для процессов идентификации. При соответствующей информационной технологии идентификации коэффициенты гармоник определяются не по формулам, а непосредственно в ходе получения и обработки экспериментальных данных.

**Abstract.** Modular technical training once again raises the question of problem oriented computing methods for computerization and training simulators. This could include options for methods outlined in this article. A new method for fast piecewise-linear interpolation to low uniform or non-uniform grid is focused on functions of many variables (up to 8–10). Its shortcomings are more than repaid computational efficiency, creating the ability to imitate important effects, particularly in critical flight modes. Method for solving multiextreme multidimensional tasks enables you to quickly implement complex parametric optimization. Some promotion achieved objectives synthesis of models of physical factors. For modeling tasks in technical means of teaching the accuracy of source arrays of data usually is low (errors are calculated per cent). The main advantage of the harmonic (spectral) represent an expression of the approximating function is the possibility of formalized analysis image (topology) function from the perspective of the necessary detail descriptions. Such formal analysis is required for the use of other more convenient methods of approximation (including piecewise linear interpolation method on sparse grid). When this maximum error of piecewise linear interpolation can be units per cent. Further justification for such rules specify the grid will be given discretion with respect to the piecewise-bar and piecewise linear interpolation functions of many arguments. Note that the trigonometric model of approximation function has another positive quality. In view of the orthogonal basis functions it is useful for the identification process. With the appropriate information technology of identification of coefficients of harmonics are determined not by the equations, and directly in the course of receiving and processing of experimental data.

**Ключевые слова:** имитаторы авиационных тренажеров, математические модели объектов, кусочно-линейная интерполяция, методы и средства идентификации, метод аппроксимации.

**Key words:** aviation simulators, simulators and mathematical models of objects, piecewise-linear interpolation, methods and means of identification method of approximation.

### Введение

Имеющийся опыт показывает, что, несмотря на высокий уровень развития вычислительной математики, проблемная ориентация в сочетании с аппаратными средствами открывает все новые возможности создания быстрых (экономичных в вычислительном отношении), удобных алгоритмов и информационных технологий. Именно такие новые вычислительные алгоритмы составляют основное содержание статьи.

### Гармоническая аппроксимация

Пусть функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ , заданная в прямоугольной области

$$-L_j = -N_j \Delta_j \leq x_j \leq L_j = N_j \Delta_j, \quad (j = 1, 2, \dots, r), \tag{1}$$

аппроксимируется суммой Фурье:

$$\tilde{f} = \sum_{v_1, v_2, \dots, v_r} \left\{ a_{v_1, v_2, \dots, v_r} \cos \left[ \pi \left( v_1 \frac{x_1}{L_1} + v_2 \frac{x_2}{L_2} + \dots + v_r \frac{x_r}{L_r} \right) \right] + b_{v_1, v_2, \dots, v_r} \sin \left[ \pi \left( v_1 \frac{x_1}{L_1} + v_2 \frac{x_2}{L_2} + \dots + v_r \frac{x_r}{L_r} \right) \right] \right\}. \tag{2}$$

Здесь  $v_j = 0, 1, \dots, N_j$ ;  $j = 1, 2, \dots, r$ ;  $a_{v_1, v_2, \dots, v_r}$ ,  $b_{v_1, v_2, \dots, v_r}$  – постоянные коэффициенты.

Эти коэффициенты в принципе могут приближенно определяться посредством дискретного обратного преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} a_{v_1, \dots, v_r} &= \frac{2}{N_1 \dots N_r} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} f(\varepsilon_1 \Delta_1, \dots, \varepsilon_r \Delta_r) \cos \left( \frac{\pi v_1 \varepsilon_1}{N_1} \right) \dots \cos \left( \frac{\pi v_r \varepsilon_r}{N_r} \right), \\ b_{v_1, \dots, v_r} &= \frac{2}{N_1 \dots N_r} \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r} f(\varepsilon_1 \Delta_1, \dots, \varepsilon_r \Delta_r) \sin \left( \frac{\pi v_1 \varepsilon_1}{N_1} \right) \dots \sin \left( \frac{\pi v_r \varepsilon_r}{N_r} \right). \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь  $\varepsilon_j$  – целые числа, изменяющиеся в пределах  $-N_j \leq \varepsilon_j \leq N_j - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$ .

Общее число коэффициентов в выражении (2) равно

$$N_\Sigma = 2 \prod_{j=1}^r (2N_j + 1),$$

т.е. даже больше, чем в выражении  $N_\Sigma = (1 + N_1)(1 + N_2) \dots (1 + N_r)$ . Однако многими гармониками из этого числа обычно можно пренебречь. Некоторым подтверждением этого является выражение (2) для среднего квадрата функции в области  $G_\Sigma$  (1). Ввиду ортогональности тригонометрических базисных функций среднее значение  $\tilde{f}^2$  равно

$$\overline{\tilde{f}^2} = \frac{1}{2^r L_1 \dots L_r} \int_{G_\Sigma} \tilde{f}^2 dx_1 \dots dx_r = \frac{1}{2} \sum_{v_1, \dots, v_r} (a_{v_1, \dots, v_r}^2 + b_{v_1, \dots, v_r}^2) \tag{4}$$

(в данном случае постоянная составляющая считается отсутствующей).

Для задач моделирования в ТСО точность исходных массивов данных обычно невысока (ошибки исчисляются процентами) и на основе (4) можно предполагать, что коэффициенты, которые на порядок и более меньше остальных, могут быть отброшены.

Главным достоинством гармонического (спектрального) представления (2) аппроксимирующей функции является возможность формализованного анализа образа (топологии) функции с пози-

ций необходимой детальности описания. Такой формализованный анализ требуется и для применения других более удобных методов аппроксимации (в том числе метода кусочно-линейного интерполирования на разреженной сетке, см. ниже).

Таким образом, спектральное представление функций многих аргументов может выступать в роли трудоемкой, но разовой вспомогательной операции на стадии разработки специального программного обеспечения имитаторов ТСО.

Для пояснения обратимся к примерам кусочно-линейной интерполяции синусоидальной и других функций скалярного аргумента.

На рис. 1 приведен график зависимости максимальной ошибки  $\delta f_m$  кусочно-линейной интерполяции синусоидальной функции от величины дискрета (шага сетки)  $\Delta$ , где  $L$  – полупериод аппроксимируемой синусоиды. Видно, что ошибка  $\delta f_m$ , составляющая при  $\Delta = 0,5L$  примерно 21 % от максимального значения  $f$ , быстро убывает с уменьшением  $\Delta$  и при  $\Delta = 0,125L$   $\delta f_m < 2\%$ .

В табл. 1 представлены примеры гармонического приближения функций скалярного аргумента, рассматриваемых как периодические. Здесь же указан характер зависимостей максимальных ошибок кусочно-линейной интерполяции этих функций от величины  $\Delta$ . Сопоставление скорости убывания амплитуд гармоник с ростом их частоты (номера) и указанной зависимости  $\delta f_m$  от  $\Delta$  позволяет сформулировать рекомендации по выбору  $\Delta$  (последний столбец табл.1): при сохранении в аппроксимирующем тригонометрическом полиноме 3-й – 5-й гармоник рекомендуется шаг сетки, равный  $1/8$  полного интервала задания интерполируемой функции  $\left(\Delta = \frac{\pi}{4}\right)$ .

При этом максимальные ошибки кусочно-линейной интерполяции могут составлять первые единицы процентов, но могут и превышать 10 % (см. табл. 1). Дальнейшее обоснование подобных правил задания дискретности сетки будет изложено ниже применительно к кусочно-линейчатой и кусочно-линейной интерполяции функций многих аргументов.

В заключение заметим, что тригонометрическая модель аппроксимируемой функции (2) имеет еще одно положительное качество. Ввиду ортогональности базисных функций она удобна для процессов идентификации [1–7]. При соответствующей информационной технологии идентификации коэффициенты гармоник определяются не по формулам (2), а непосредственно в ходе получения и обработки экспериментальных данных.

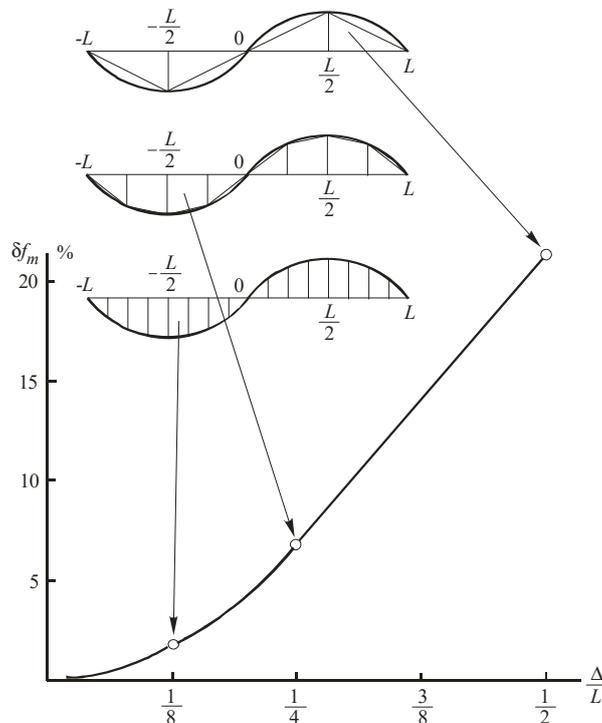


Рис. 1. График зависимости максимальной ошибки  $\delta f_m$  кусочно-линейной интерполяции синусоидальной функции от величины шага сетки  $\Delta$

Таблица 1

Примеры гармонического представления функций скалярного аргумента и точности кусочно-линейной интерполяции

	Пример 1	Пример 2
Функция	$f = x$ $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}$	$f = x^2$ $-\pi \leq x \leq \pi$
График функции		
Гармоническое представление	$f = \frac{4}{\pi} \left( \sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \dots \right)$	$f = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left( \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$
Максимальная ошибка кусочно-линейной интерполяции	$\delta f_m = 0$ при $\Delta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \dots$	
Рекомендуемый шаг сетки	При сохранении 5-й гармоники $\Delta = \frac{\pi}{4}$	При сохранении 5-й гармоники $\Delta = \frac{\pi}{4}$
	Пример 3	Пример 4
Функция	$f = x(\pi - x)$ $0 \leq x \leq \pi$	$f = x^3 - \pi^2 x$ $-\pi \leq x \leq \pi$
График функции		
Гармоническое представление	$f = \frac{8}{\pi} \left( \sin x + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots \right)$	$f = -12 \left( \sin x - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \dots \right)$
Максимальная ошибка кусочно-линейной интерполяции		
Рекомендуемый шаг сетки	При сохранении 3-й гармоники $\Delta = \frac{\pi}{4}$	При сохранении 3-й гармоники $\Delta = \frac{\pi}{4}$

### Кусочно-линейчатая интерполяция Лагранжа

Кусочно-линейчатая (как и кусочно-линейная) интерполяция функции нескольких аргументов  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  осуществляется обычно на равномерной прямоугольной сетке в пространстве аргументов. Элементарной ячейкой такой сетки служит  $r$ -мерный прямоугольный параллелепипед с ребрами длиной  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$ . Эти величины могут выбираться на основе только что описанного подхода, базирующегося на вспомогательном спектральном (гармоническом) представлении интерполируемой функции.

В простейшем варианте гармоническому приближению подлежат  $r$  одномерных сечений интерполируемой функции вида  $f(x_1, 0, \dots, 0)$ ,  $f(0, x_2, 0, \dots, 0)$ , ...,  $f(0, 0, \dots, x_r)$ . Здесь аргументы  $x_1, \dots, x_r$  изменяются в пределах общей прямоугольной области  $G_\Sigma$  (1). Кстати сказать, расширение областей эксплуатационных и предельных режимов (см. выше) до области  $G_\Sigma$  и соответствующее продолжение функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  в периферийные части  $G_\Sigma$  должны выполняться так, чтобы не породить фиктивных высокочастотных гармоник и в то же время допускать периодическое продолжение во всем внешнем по отношению к  $G_\Sigma$  пространстве [5, 6].

Для одномерного сечения это поясняет рис. 2. Области эксплуатационных режимов здесь соответствует интервал  $a-b$ , области предельных режимов – интервал  $b-g$ . Вне интервала  $b-g$  аппроксимируемая функция не определена (отсутствует исходный массив данных). Между тем в интересах информационной технологии аппроксимации желательно распространить аппроксимируемую функцию на весь интервал  $d-e$  ( $G_\Sigma$ ). Первым способом продолжения служит такой, при котором функция  $f$  на интервалах  $g-e$  и  $d-b$  считается тождественно равной нулю. Однако при этом на интервале  $d-e$  функция обычно становится разрывной, что порождает «фиктивные» высокочастотные гармоники [8, 9].

При втором способе на интервалах  $g-e$ ,  $d-b$  функция считается постоянной, равной своим значениям в точках  $g$  и  $b$  соответственно (см. рис. 2). При этом способе функция обычно терпит разрывы на границах интервала периодичности, что опять-таки порождает «фиктивные» высокочастотные гармоники.

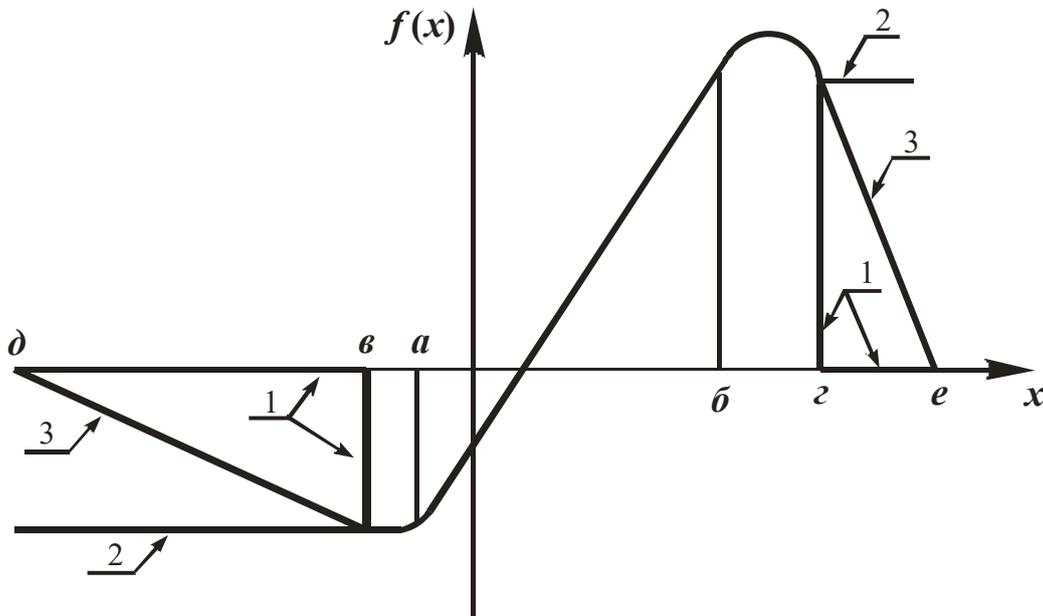


Рис. 2. Гармоническое приближение интерполируемой функции в пределах общей прямоугольной области  $G_\Sigma$

Третий (рекомендуемый) способ обеспечивает непрерывность аппроксимируемой функции как внутри интервала  $d-e$ , так и на его границах при периодическом продолжении (см. рис. 2).

Возвращаясь к выбору величин  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r$ , заметим, что вариант, базирующийся на спектрах одномерных сечений, является очень простым, но несовершенным. Здесь полностью игнорируются все возможные нелинейные перекрестные «связи» функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$ . При их учете необходимо «полное» представление (2) и отбор состава гармоник согласно выражению (4) или сформулированному выше правилу.

Вершины элементарной ячейки, являющиеся узлами прямоугольной равномерной сетки, имеют координаты

$$\left(i_1 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\Delta_1, \left(i_2 + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\Delta_2, \dots, \left(i_r + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\right)\Delta_r, \tag{5}$$

где  $i_1, i_2, \dots, i_r$  – целые числа.

Введем индексы  $q_1, q_2, \dots, q_r$ , равные последним членам в скобках выражений (5) при конкретной (фиксированной) комбинации знаков. Каждой вершине будет соответствовать одна-единственная комбинация индексов  $q_1, q_2, \dots, q_r$ , которую примем за номер вершины в двоичной форме. Всего элементарный параллелепипед имеет  $2^r$  вершин, являющихся одновременно узлами сетки.

Вершине (узлу сетки)  $[q_1, q_2, \dots, q_r]$  соответствует значение интерполируемой функции

$$f\left[\left(i_1 + \frac{1}{2} + q_1\right)\Delta_1, \left(i_2 + \frac{1}{2} + q_2\right)\Delta_2, \dots, \left(i_r + \frac{1}{2} + q_r\right)\Delta_r\right]. \tag{6}$$

Широко известна интерполяционная формула Лагранжа, которую часто именуют формулой кусочно-линейной интерполяции как для одномерного, так и многомерного случаев [2, 8, 9]. В наших обозначениях при равномерной прямоугольной сетке она имеет вид

$$\tilde{f} = \sum_{q_1, \dots, q_r = \pm \frac{1}{2}} (-1)^{\frac{r}{2} \sum_{j=1}^r q_j} \left[\frac{x_1}{\Delta_1} - \left(i_1 + \frac{1}{2} - q_1\right)\right] \dots \left[\frac{x_r}{\Delta_r} - \left(i_r + \frac{1}{2} - q_r\right)\right] \times f\left[\left(i_1 + \frac{1}{2} + q_1\right)\Delta_1, \dots, \left(i_r + \frac{1}{2} + q_r\right)\Delta_r\right]. \tag{7}$$

Как легко проверить, для всех  $2^r$  вершин элементарного параллелепипеда значения функции  $\tilde{f}$  равны значениям интерполируемой функции  $f$  и вдоль ребер этого параллелепипеда  $\tilde{f}$  является линейной функцией одного аргумента. Однако в целом функция  $\tilde{f}$  нелинейная и интерполяцию по выражению (7) целесообразно именовать кусочно-линейчатой. В каждой элементарной ячейке пространства аргументов она соответствует линейчатой поверхности [10, 11].

Значение  $\tilde{f}$  в центральной точке элементарного параллелепипеда равно среднему арифметическому значению функции  $f$  во всех  $2^r$  вершинах этого параллелепипеда.

Для квадратичной функции

$$f(x_1, \dots, x_r) = f(i_1, \Delta_1, \dots, i_r, \Delta_r) + \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 (x_j - i_j \Delta_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^r \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)_0 (x_j - i_j \Delta_j)(x_k - i_k \Delta_k)$$

(индексом «0» обозначены частные производные функции  $f$  в вершине  $x_1 = i_1 \Delta_1, \dots, x_r = i_r \Delta_r$ ) ошибка интерполяции в средней точке элементарного параллелепипеда равна

$$\delta = \tilde{f}\left[\left(i_1 + \frac{1}{2}\right)\Delta_1, \dots, \left(i_r + \frac{1}{2}\right)\Delta_r\right] - f\left[\left(i_1 + \frac{1}{2}\right)\Delta_1, \dots, \left(i_r + \frac{1}{2}\right)\Delta_r\right] = \frac{1}{8} \sum_{j \neq k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)_0 \Delta_j \Delta_k, \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем значениям  $j, k$  от 1 до  $r$  за исключением значений  $j = k$ .

Интерполяция по формуле (7) требует задания значений интерполируемой функции во всех узлах рассматриваемой сетки. Число элементарных арифметических операций при однократном вычислении по формуле (7) (без учета операций адресации к памяти) приблизительно составляет  $(3r+1)2^r$ . При  $r=6$  – это 1200, при  $r=10$  – 32000.

## Заключение

Из изложенного выше следует, что ни один из традиционных методов аппроксимации применительно к многомерным задачам не может рассматриваться как экономичный в вычислительном отношении. Поэтому в тренажерах четвертой и предшествующих базовых конструкций интерполяция характеристик выполнялась и выполняется сугубо приближенно посредством предварительной декомпозиции. При этом функции многих переменных представляются в виде арифметических сумм или сумм произведений функций одной, двух, иногда трех переменных [3, 4, 10]. Интерполяция частных функций при  $r \leq 3$  выполняется достаточно просто, в частности, посредством метода Лагранжа.

Такой подход отвечает традиционным формам представления исходной информации в виде семейств графиков или таблиц с одним, двумя или тремя входами.

Вычислительные затраты, необходимый объем памяти здесь ограничены. Однако от проектировщиков требуется поиск удачных эвристических решений, обычно отнимающий много времени. Итоговая точность, как правило, невысока. В целом соответствующая информационная технология не может быть признана современной.

## Библиографический список

1. *Богуславский, И. А.* Прикладные задачи фильтрации и управления / И. А. Богуславский. – М. : Наука, 1983.
2. *Красовский, А. А.* Быстрая линейная интерполяция функций многих переменных в системах цифрового моделирования / А. А. Красовский // Доклады Академии наук СССР. – 1989. – Т. 308, № 6. – С. 115–122.
3. *Красовский, А. А.* Авиационные тренажеры / А. А. Красовский, В. И. Лопатин, В. И. Наумов, Ю. Н. Самойлаев. – М. : Изд-во ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1992.
4. *Красовский, А. А.* Математическое моделирование и компьютерные системы обучения и тренажа / А. А. Красовский. – М. : Изд-во ВВИА им. Н. Е. Жуковского, 1989.
5. *Лапшин, Э. В.* Исследование информационных процессов, протекающих в тренажерах / Э. В. Лапшин // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 2. – С. 87–93.
6. *Лапшин, Э. В.* Математическое моделирование динамики полета летательного аппарата : монография / Э. В. Лапшин, А. А. Красовский, Н. К. Юрков ; под ред. Э. В. Лапшина. – Пенза : Изд-во Пенз. филиала РГУ ИТП, 2008. – 260 с.
7. *Кубланов, М. С.* Об адекватности математических моделей и задаче идентификации / М. С. Кубланов // Научный вестник МГТУ ГА. Сер.: Аэромеханика и прочность. – 2009. – № 138. – С. 101–106.
8. *Кубланов, М. С.* Математическое моделирование задач летной эксплуатации воздушных судов на взлете и посадке : монография / М. С. Кубланов. – М. : РИО МГТУ ГА, 2013. – 270 с.
9. *Кубланов, М. С.* Основные принципы математического моделирования динамики полета летательных аппаратов / М. С. Кубланов // Научный вестник МГТУ ГА. Сер.: Аэромеханика и прочность. – 2001. – № 37. – С. 11–15.
10. *Богословский, С. В.* Динамика полета летательных аппаратов : учеб. пособие / С. В. Богословский, А. Д. Дорофеев. – СПб., 2002. – 64 с.
11. *Юрков, Н. К.* К проблеме моделирования риска отказа электронной аппаратуры длительного функционирования / Н. К. Юрков, И. И. Кочегаров, Д. Л. Петрянин // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. – 2015. – № 4 (32). – С. 220–231.

### Лапшин Эдуард Владимирович

доктор технических наук, профессор,  
кафедра конструирования  
и производства радиоаппаратуры,  
Пензенский государственный университет  
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)  
E-mail: edlapshin@mail.ru

### Lapshin Eduard Vladimirovich

doctor of technical sciences, professor,  
sub-department of radio equipment design  
and production,  
Penza State University  
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 629.7.072.8

Лапшин, Э. В.

Гармоническая аппроксимация и кусочно-линейчатая интерполяция Лагранжа функций многих переменных применительно к авиационным тренажерам / Э. В. Лапшин // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 2 (22). – С. 11–17. – DOI 10.21685/2307-4205-2018-2-2.