УДК 519.87
doi:10.21685/2307-4205-2021-2-2

К ПРОБЛЕМЕ СИНТЕЗА УПРАВЛЯЕМЫХ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ И БЕЗОПАСНОСТИ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СТРАТЕГИИ УПРАВЛЕНИЯ

В. А. Каштанов[1], О. Б. Зайцева[2]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия
[2] Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
[1] vakashtanov@hse.ru, [2] o_zaiceva@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Исследуются управляемые модели надежности и безопасности при ограничении на стратегии управления. *Материалы и методы*. Математическая задача сводится к поиску экстремума дробно-линейного функционала, характеризующего качество функционирования системы и качество управления, по множеству функций распределения, определяющих периодичность проведения плановых восстановительных работ. *Результаты и выводы*. Особенности постановки задачи заключаются в том, что вводятся ограничения на распределения, выражаемые ограничениями на линейные функционалы, но число таких ограничений несчетно. При решении задачи основное внимание уделено анализу структуры функции распределения, на которой достигается искомый экстремум.

Ключевые слова: управляемый полумарковский процесс, стратегия управления, дробно-линейный функционал, задача оптимизации

Для цитирования: Каштанов В. А., Зайцева О. Б. К проблеме синтеза управляемых моделей надежности и безопасности при ограничениях на стратегии управления // Надежность и качество сложных систем. 2021. № 2. С. 13–23. doi:10.21685/2307-4205-2021-2-2

ON THE PROBLEM OF SYNTHESIS OF CONTROLLED RELIABILITY MODELS AND SECURITY UNDER RESTRICTIONS ON MANAGEMENT STRATEGIES

V.A. Kashtanov[1], O.B. Zaytseva[2]

[1] National Research University "Higher School of Economics", Moscow, Russia
[2] Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
[1] vakashtanov@hse.ru, [2] o_zaiceva@mail.ru

Abstract. *Background*. The paper investigates controlled models of reliability and safety under constraints on control strategies. *Materials and methods*. The mathematical problem is reduced to the search for the extremum of the linear-fractional functional characterizing the quality of the system's functioning and the quality of control over the set of distribution functions that determine the frequency of planned restoration work. *Results and conclusions*. The peculiarities of the problem statement are that there are restrictions on distributions expressed by restrictions on linear functionals, but the number of such restrictions is uncountable. When solving the problem, the main attention is paid to the analysis of the structure of the distribution function at which the desired extremum is reached.

Keywords: controlled semi-Markov process, control strategy, linear-fractional functional, optimization problem

For citation: Kashtanov V.A., Zaytseva O.B. On the problem of synthesis of controlled reliability models and security under restrictions on management strategies. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2021;2:13–23. (In Russ.). doi:10.21685/2307-4205-2021-2-2

Введение

При исследовании управляемых моделей надежности и безопасности строится управляемый случайный процесс, описывающий эволюцию исследуемой системы, затем на траекториях этого процесса определяется некоторый функционал, который определяет качество функционирования и управления, и, наконец, решается задача оптимизации этого функционала, т.е. определение экстремума функционала и характеристик, определяющих стратегию управления, на которых этот экстремум достигается.

Для моделей надежности и безопасности, когда речь идет об оптимальном выборе периодичности проведения плановых предупредительных работ, пространство управлений совпадает с множеством положительных чисел $R^{+}=\left(0,\infty\right)$, а вероятностная мера задается функциями распределения $G\left(u\right)=P\left\{\chi<u\right\}$, где χ есть принимаемое решение.

Если процесс функционирования исследуемой системы описывается управляемым полумарковским процессом с конечным множеством состояний [1, 2], то математическое ожидание накопленного эффекта (функционала) при длительном наблюдении за процессом функционирования исследуемой системы является дробно-линейным функционалом

$$I(G_1,G_2,...G_N)=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}...\int\limits_0^{+\infty}A(t_1,t_2,...t_N)dG_1(t_1)dG_2(t_2)...dG_N(t_N)}{\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}...\int\limits_0^{+\infty}B(t_1,t_2,...t_N)dG_1(t_1)dG_2(t_2)...dG_N(t_N)}, \tag{1}$$

если вложенная цепь Маркова имеет N состояний и в состоянии i решение (период проведения плановых предупредительных работ) определяется функцией распределения $G_i(t)$.

Данная зависимость позволила поставить математическую задачу поиска экстремума (максимума или минимума) этого дробно-линейного функционала по множеству допустимых стратегий управления (распределений) и определение стратегии (оптимальный набор распределений), на которой этот экстремум достигается.

При такой постановке возникает вопрос, как определить пространство допустимых стратегий управления. Коль скоро стратегии в моделях надежности и безопасности отождествляются (определяются) с распределениями положительных случайных величин $G_i(t)$, то оганичения формулируются для этих распределений. Стандартно ограничения сводятся к двум условиям:

1) поиск экстремума функционала (1) осуществляется по множеству допустимых стратегий управления, которые как вероятностные распределения удовлетворяют неравенствам

$$0\le G_i(t)\le 1, i\in E=\left(1,2,...,N\right), t\ge 0, \tag{2}$$

где $E=\left(1,2,...,N\right)$ – множество состояний вложенной цепи Маркова. Неравенства (2) определяют ограничения на множество допустимых стратегий управления $\Omega=\left\{\bar{G}=\left(G_1,G_2,...,G_N\right)\right\}$;

2) множеству допустимых стратегий управления Ω принадлежат только те распределения $\bar{G}=\left(G_1,G_2,...,G_N\right)$, для которых существуют интегралы, входящие в выражение (1).

В настоящей работе мы обобщим пространство возможных стратегий и усилим ограничения (2).

В реальной ситуации не всегда можно часто проводить плановые восстановительные работы. Поэтому на пространство допустимых стратегий введем дополнительные ограничения.

Введем в рассмотрение набор функций распределения

$$0\le G_{1i}(t)\le G_{2i}(t)\le 1,\ i\in E,\ t\ge 0,\ G_{1i}(t)=G_{2i}(t)=0,\ t\le 0$$

и зададим набор положительных констант $\left(\mu_1,\mu_2,...,\mu_N\right)$.

Далее определим множество допустимых распределений для каждого состояния и множество допустимых стратегий

$$\Omega_i=\left\{G_i(t):0\le G_{1i}(t)\le G_i(t)\le G_{2i}(t)\le 1,\int\limits_0^{\infty}xdG_i(x)\ge\mu_i\right\}, i\in E; \tag{3}$$

$$\Omega=\prod_{i\in E}\Omega_i. \tag{4}$$

Далее заметим, что для каждого состояния ограничения (3) помимо классического ограничения на первый момент, выраженного неравенством $\int_0^{\infty} x dG_i(x) \geq \mu_i$ на линейный функционал, содержатся неравенства, относящиеся непосредственно к распределениям. Однако следует заметить, что последние также можно представить в виде ограничений типа неравенств на линейные функционалы

$$G_{1i}(t) \leq \int_0^{+\infty} u(x,t) dG_i(x) \leq G_{2i}(t),\ i \in E = (1, 2, ..., N),\ u(x,t) = \begin{cases} 1, x < t, \\ 0, x \geq t; \end{cases} t \in [0,+\infty).$$

Следовательно, сформулированная задача есть задача дробно-линейного программирования при несчетном числе линейных ограничений.

Теперь в принятых обозначениях можно сформулировать математическую задачу: *определить максимум дробно-линейного функционала (1) по множеству допустимых распределений (4) и стратегию* $\overline{G}^{(0)} = \left(G_1^{(0)}, G_2^{(0)}, ..., G_N^{(0)}\right)$, *на которой этот максимум достигается*:

$$\max_{\overline{G} \in \Omega} I\left(G_1, G_2, ... G_N\right) = I\left(G_1^{(0)}, G_2^{(0)}, ..., G_N^{(0)}\right). \tag{5}$$

Основные математические результаты

1. **Анализ ограничений**. Прежде всего проведем анализ ограничений на множество допустимых распределений (стратегий управления), определяемых соотношениями (2) и (3) для того, чтобы определить исходные данные, при которых множество Ω не пусто, $\Omega \neq \varnothing$.

Для положительной случайной величины ξ с распределением $G(x)$ справедливо равенство для математического ожидания $M\xi$

$$\int_0^{+\infty} x dG(x) = \int_0^{+\infty} \overline{G}(x) dx,\ \overline{G}(x) = 1 - G(x),$$

если существует какой-либо из интегралов, входящих в это равенство.

Следовательно, исходные данные (константы μ_i и функции $G_{1i}(t), G_{2i}(t), i \in E$) должны быть такими, чтобы для них выполнялись неравенства

$$\mu_{2i} = \int_0^{+\infty} \overline{G}_{2i}(x) dx \leq \mu_i \leq \int_0^{+\infty} \overline{G}_{1i}(x) dx = \mu_{1i},\ \overline{G}_{ki}(x) = 1 - G_{ki}(x), i \in E, k = 1,2.$$

Если для некоторого состояния $i \in E$ выполняется неравенство $\mu_i > \mu_{1i}$, то множество допустимых стратегий Ω пусто, $\Omega = \varnothing$. Если для некоторого состояния $i \in E$ выполняется неравенство $\mu_i < \mu_{2i}$, то дополнительное условие на первый момент является несущественным.

2. **Упрощение задачи**. В настоящем разделе сформулируем лемму, позволяющую свести решение задачи дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования. Она формулирует достаточные условия совпадения множеств распределений, на которых достигаются экстремумы дробно-линейного функционала и специально подобранного линейного функционала.

ЛЕММА [3]. Если существует максимум дробно-линейного функционала (1) по множеству распределений $\overline{G} = \left(G_1, G_2, ..., G_N\right) \in \Omega$ (обозначим его через C), тогда выполняется равенство для множеств распределений, на которых достигаются экстремумы двух функционалов дробно-линейного и специально подобранного линейного, а именно:

$$\Omega_0 = \left\{\overline{G} : I\left(\overline{G}\right) = C\right\} = \left\{\overline{G} : \max_{\overline{G} \in \Omega} J\left(\overline{G}\right) = 0\right\}, \tag{6}$$

где линейный специально подобранный функционал и его подынтегральная функция определяются равенствами

$$J\left(\overline{G}\right) = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} C(t_1, t_2, ... t_N) dG_1(t_1) dG_2(t_2) ... dG_N(t_N),$$

$$C(t_1, t_2, ... t_N) = A(t_1, t_2, ... t_N) - CB(t_1, t_2, ... t_N). \tag{7}$$

Таким образом, при исследовании структуры экстремального распределения дробно-линейного функционала необходимо анализировать свойства функции (7), в определение которой входит неизвестный параметр C.

З а м е ч а н и е. В работе [4] приведено доказательство леммы (равенство (6)) при дополнительном ограничении – положительности подынтегральной функции знаменателя (1),

$$B(t_1,t_2,...t_N) > 0, t_i > 0, i \in E.$$

3. **Анализ структуры экстремальной функции для линейного функционала**. Анализ начнем с исследования линейного функционала, определяемого равенством (число состояний $N = 1$)

$$L(G) = \int_0^{+\infty} C(t)dG(t), \tag{8}$$

где $C(t)$ – ограниченная на любом конечном отрезке функция, имеющая конечное число точек разрыва первого рода и определенная на полупрямой, $t \in [0,+\infty)$; $G(t)$ функция распределения действительной случайной величины. Считаем далее функции распределения непрерывными слева.

Обозначим:

– $\Omega^{(1)}$ множество функций распределения $G(t)$, для которых функционал (8) существует;

– $\Omega^{(2)}$ множество функций распределения $G(t)$, для которых выполняются неравенства при $t > 0$

$$0 \le G_{11}(t) \le G(t) \le G_{21}(t) \le 1, \tag{9}$$

где $G_{i1}(t), i = 1, 2,$ $G_{11}(t) \le G_{21}(t)$ – две заданные функции распределения, принадлежащие множеству $\Omega^{(1)}$;

– $\Omega^{(3)}$ множество функций распределения $G(t)$, для которых выполняется неравенство

$$\int_0^{+\infty} t dG(t) \ge \mu_1; \tag{10}$$

– $\Omega = \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)} \cap \Omega^{(3)}$ – множество функций распределения $G(t)$, для которых функционал (8) существует и для которых выполняются неравенства (9) и (10).

Предположим, что для функционала (8) на множестве Ω существует экстремум, например, существует максимум

$$\max_{G\in\Omega} L(G) = C < \infty .$$

Обозначим $\Omega^{(0)}$ множеством распределений, для которых достигается максимум функционала (8), причем справедливо соотношение

$$\Omega^{(0)} \ne \varnothing$$

в силу условия существования максимума.

Сначала решаем задачу без ограничения $G \in \Omega^{(3)}$.

Теперь сформулируем теорему.

ТЕОРЕМА 1 [5]. Если существует максимум функционала (8) по множеству распределений $\Omega_1 = \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)}$, $\max_{G\in\Omega} L(G) = C < \infty$, подынтегральная функция $C(t)$ имеет ровно один максимум в точке $0 \le t_1 \le +\infty$ и в области $0 < t < t_1$ подынтегральная функция неубывающая, а в области $t_1 < t < +\infty$ подынтегральная функция невозрастающая, то этот максимум функционала достигается на распределении

$$G^*(t) = \begin{cases} G_{11}(t), & 0 \le t \le t_1, \\ G_{21}(t), & t_1 < t \le +\infty, \end{cases} \tag{11}$$

т.е.

$$\max_{G\in\Omega_1} L(G) = L(G^*) = C =$$
$$= \int_0^{t_1} C(x)dG_{11}(x) + C(t_1)\left[\lim_{x\to t_1+0} G_{21}(x) - G_{11}(t_1)\right] + \int_{t_1+0}^{+\infty} C(x)dG_{21}(x) \tag{12}$$

и справедливо равенство

$$\max_{t\in[0,\infty)}\left\{\int_0^{t} C(x)dG_{11}(x) + C(t)\left[\lim_{x\to t+0} G_{21}(x) - G_{11}(t)\right] + \int_{t+0}^{+\infty} C(x)dG_{21}(x)\right\} = C. \tag{13}$$

Напомним, что доказательство вышеприведенного утверждения изложено в работе [5]. Кроме этого, отмечаем, пока проблема исследуется без учета ограничений на первый момент.

Далее сформулируем полезное следствие доказанной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Если подынтегральная функция $C(t)$ в области определения $0 \le t \le +\infty$ не убывает $(t_1 = +\infty)$, то максимум функционала (8) достигается на нижней границе $L(G_{11}) = C$. Если подынтегральная функция $C(t)$ в области определения $0 \le t \le +\infty$ не возрастает $(t_1 = 0)$, то максимум функционала (8) достигается на верхней границе, т.е. $C = L(G_{21})$.

Далее принимаем во внимание условие $G \in \Omega^{(3)}$. Сначала вычисляем первый момент для экстремальной функции (11) при оптимизации по множеству распределений $\Omega_1 = \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)}$. С учетом замечаний, изложенных в разделе «Анализ ограничений», и конкретного вида экстремальной функции (11) имеем

$$\mu = \int_0^{+\infty} t dG^*(t) == \int_0^{t_1}\left(1 - G_{11}(x)\right)dx + \int_{t_1+0}^{+\infty}\left(1 - G_{21}(x)\right)dx,$$

где точка t_1 определяется как точка максимума функции (13).

Тогда, если выполняется неравенство $\mu \ge \mu_1$, то задача решена, оптимальная функция при сформулированных выше условиях определяется равенством (11), если выполняется неравенство $\mu < \mu_1$, то для решения требуются дополнительные исследования.

4. **Анализ структуры экстремальной функции для дробно-линейного функционала**

При исследовании экстремума (максимума) дробно-линейного функционала

$$I(G) = \frac{\int_0^{+\infty} A(t)dG(t)}{\int_0^{+\infty} B(t)dG(t)} \tag{14}$$

и структуры распределения, на котором этот максимум достигается, воспользуемся теоремой, доказательство которой базируется на сформулированных выше лемме и теореме.

Кроме этого, используем обозначения:

– $\Omega^{(1)}$ – множество функций распределения $G(t)$, для которых функционал (14) существует;

– $\Omega^{(2)}$ – множество функций распределения $G(t)$, для которых выполняются неравенства (9);

– $\Omega^{(3)}$ – множество функций распределения $G(t)$, для которых выполняется неравенство (10);

– $\Omega = \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)} \cap \Omega^{(3)}$ – множество функций распределения $G(t)$, для которых функционал (14) существует и для которых выполняются неравенства (9) и (10).

ТЕОРЕМА 2 [5]. Если существует максимум функционала (14) по множеству распределений $\Omega_1 = \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)}$, а подынтегральные функции $A(t)$ и $B(t)$, ограниченные на любом конечном отрезке, и имеющие конечное число точек разрыва первого рода, а также определенные на полупрямой, $t \in [0, +\infty)$; а также эти функции таковы, что функция $C(t) = A(t) - CB(t)$ имеет ровно один максимум в точке $0 \le t_1 \le +\infty$ и в области $0 < t < t_1$ функция $C(t)$ неубывающая, а в области $t_1 < t < +\infty$

функция $C(t)$ невозрастающая, то этот максимум функционала по множеству Ω_1 достигается на распределении (11), т.е.

$$\max_{G\in\Omega_1} I(G) = L(G^*) = C =$$
$$= \frac{\int_0^{t_1} A(x)dG_{11}(x) + A(t_1)\left[\lim_{x\to t_1+0} G_{21}(x) - G_{11}(t_1)\right] + \int_{t_1+0}^{+\infty} A(x)dG_{21}(x)}{\int_0^{t_1} B(x)dG_{11}(x) + B(t_1)\left[\lim_{x\to t_1+0} G_{21}(x) - G_{11}(t_1)\right] + \int_{t_1+0}^{+\infty} B(x)dG_{21}(x)} \quad (15)$$

и справедливо равенство

$$\max_{t\in[0,\infty)} \frac{\int_0^{t} A(x)dG_{11}(x) + A(t)\left[\lim_{x\to t+0} G_{21}(x) - G_{11}(t_1)\right] + \int_{t+0}^{+\infty} A(x)dG_{21}(x)}{\int_0^{t} B(x)dG_{11}(x) + B(t)\left[\lim_{x\to t+0} G_{21}(x) - G_{11}(t_1)\right] + \int_{t+0}^{+\infty} B(x)dG_{21}(x)} = C. \quad (16)$$

Трудности использования теоремы 2 при исследовании конкретных моделей вызваны тем, что исследователю не известно значение максимума *C*. Поэтому привлекаются дополнительные условия.

Далее, как и при исследовании линейного функционала, принимаем во внимание условие $G\in\Omega^{(3)}$. Сначала вычисляем первый момент для экстремальной функции (11) при оптимиации по множеству распределений $\Omega_1 = \Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)}$. С учетом замечаний, изложенных в разделе «Анализ ограничений», и конкретного вида экстремальной функции (11) имеем

$$\mu = \int_0^{+\infty} t dG^*(t) == \int_0^{t_1} \left(1 - G_{11}(x)\right)dx + \int_{t_1+0}^{+\infty} \left(1 - G_{21}(x)\right)dx,$$

где точка t_1 определяется как точка максимума функции (16).

Тогда, если выполняется неравенство $\mu \geq \mu_1$, то задача решена, оптимальная функция при сформулированных выше условиях определяется равенством (11), если выполняется неравенство $\mu < \mu_1$, то для решения требуются дополнительные исследования.

Примеры. Анализ управляемых прикладных моделей

Излагаемые ниже управляемые модели надежности и безопасности в «классической» постановке, когда ограничения формулируются в виде неравенств (2), хорошо известны. Поэтому мы не будем приводить здесь подробные выводы основных соотношений, а отошлем читателя к первоисточникам.

Далее будем использовать обозначения:

– время безотказной работы системы ξ распределено по закону $F(t) = P\{\xi < t\}$, $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$;

– плановое предупредительное обновление системы, назначаемое через время $\eta \geq 0$, распределено по закону $G(t) = P\{\eta < t\}$, $G(0) = 0$;

– длительность планового предупредительного (профилактического) обновления γ_1 имеет распределение $F_1(t) = P\{\gamma_1 < t\}$, $\bar{F}_1(t) = 1 - F_1(t)$;

– длительность планового аварийного обновления системы γ_2 распределено по закону $F_2(t) = P\{\gamma_2 < t\}$, $\bar{F}_2(t) = 1 - F_2(t)$;

– длительность внепланового аварийного обновления γ_3 распределено по закону $F_3(t) = P\{\gamma_3 < t\}$, $\bar{F}_3(t) = 1 - F_3(t)$;

– расходы за единицу времени проведения планового предупредительного обновления системы c_1;

– расходы за единицу времени проведения планового аварийного обновления системы c_2;

– расходы за единицу времени проведения внепланового аварийного обновления системы c_3;

– расходы за единицу времени, проведенного в состоянии скрытого отказа c_4;

– доход, получаемый за единицу времени исправного функционирования системы c_0, $c_0 > 0$.

Для введенных выше параметров справедливы соотношения

$$M\gamma_1 \le M\gamma_2 \le M\gamma_3, c_3 \le c_2 \le c_1 \le 0, c_4 < 0.$$

1. **Управляемые модели надежности**

Модель технического обслуживания системы как единого целого, у которой появившийся отказ проявляется мгновенно.

В начальный момент $t_0 = 0$ начинается эксплуатация системы и назначается плановое предупредительное обновление системы через время $\eta \ge 0$. Назначение плановых предупредительных обновлений системы через случайное время означает введение рандомизации в процесс принятия решений, т.е. в тот момент, когда нужно принимать решение, строится реализация τ случайной величины η $(\eta = \tau)$, распределенной по закону $G(t)$, и плановое предупредительное обновление системы проводится через время τ. Если к назначенному моменту τ система не отказала, то в момент τ начинается плановое предупредительное обновление системы, которое по предположению полностью обновляет систему. Если до назначенного момента τ система отказала, то отказ обнаружился мгновенно и в момент отказа ξ начинается внеплановое аварийное обновление системы. После проведения возможных восстановительных работ, когда по предположению система полностью обновляется, осуществляется перепланирование момента проведения следующей предупредительной восстановительной работы и весь процесс обслуживания повторяется заново.

Математическое ожидание удельного дохода за единицу календарного времени определяется равенством, приведенным в работе [6]:

$$I(G) = \frac{\int_0^{+\infty} \left[c_0 \int_0^t \bar{F}(x)dx + c_1 M\gamma_1 \bar{F}(t) + c_3 M\gamma_3 F(t) \right] dG(t)}{\int_0^{+\infty} \left[\int_0^t \bar{F}(x)dx + \bar{F}(t) M\gamma_1 + F(t) M\gamma_3 \right] dG(t)}. \tag{17}$$

Если заданы две функции распределения

$$G_1(t),\ G_2(t),\ G_1(t) \le G_2(t),\ G_i(0) = 0,\ i = 1,2 \tag{18}$$

и требуется найти максимум функцмонала (16) по множеству распределений

$$\Omega = \{0 \le G_1(t) \le G(t) \le G_2(t) \le 1\},$$

то по условиям теоремы и леммы необходимо исследовать функцию

$$C(t) = c_0 \int_0^t \bar{F}(x)dx + c_1 M\gamma_1 \bar{F}(t) + c_3 M\gamma_3 F(t) - C\left[\int_0^t \bar{F}(x)dx + \bar{F}(t) M\gamma_1 + F(t) M\gamma_3 \right],$$

где $\max\limits_{G \in \Omega} I(G) = C$.

Дальнейшие исследования проведем при естественном предположении, что исследуемая система стареющая и ее интенсивность отказов $\lambda(t) = \frac{1}{\bar{F}(t)} \frac{dF(t)}{dt}$ – неубывающая функция. Анализируем свойства производной

$$\frac{dC(t)}{dt} = \bar{F}(t)\left\{ (c_0 - C) + \left[(c_3 M\gamma_3 - c_1 M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1) \right] \lambda(t) \right\}.$$

Если выполняется неравенство $(c_3M\gamma_3 - c_1M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1) \geq 0$ или выполняются неравенства

$$(c_3M\gamma_3 - c_1M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1) < 0,$$
$$(c_0 - C) + \left[(c_3M\gamma_3 - c_1M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1)\right]\lambda(+\infty) < 0,$$

то производная положительная $\frac{dC(t)}{dt} > 0$ и функция $C(t)$ достигает единственного максимума при $t = \infty$.

Если выполняются неравенства

$$(c_3M\gamma_3 - c_1M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1) < 0,$$
$$(c_0 - C) + \left[(c_3M\gamma_3 - c_1M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1)\right]\lambda(0) < 0,$$

то $\frac{dC(t)}{dt} < 0$ и функция $C(t)$ достигает единственного максимума при $t = 0$.

Наконец, если выполняются неравенства

$$(c_3M\gamma_3 - c_1M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1) < 0,$$
$$(c_0 - C) + \left[(c_3M\gamma_3 - c_1M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1)\right]\lambda(0) > 0,$$
$$(c_0 - C) + \left[(c_3M\gamma_3 - c_1M\gamma_1) - C(M\gamma_3 - M\gamma_1)\right]\lambda(+\infty) < 0,$$

то производная меняет знак с плюса на минус и в некоторой конечной точке равна нулю, т.е. функция $C(t)$ имеет единственный максимум.

Тем самым доказано, что при любых значениях исходных параметров и любом значении максимума C для функции $C(t)$ выполняются условия доказанной выше теоремы. Поэтому максимум функционала для стареющих систем достигается на функциях (1), а параметр t_1 определяется как точка максимума функции

$$\max_{G \in \Omega_1} I(G) = \max_{0 \leq \tau \leq +\infty} \frac{\int_0^{\tau} A(t)dG_1(t) + A(\tau)\left(G_2(\tau) - G_1(\tau)\right) + \int_{\tau}^{+\infty} A(t)dG_2(t)}{\int_0^{\tau} B(t)dG_1(t) + B(\tau)\left(G_2(\tau) - G_1(\tau)\right) + \int_{\tau}^{+\infty} B(t)dG_2(t)}, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} A(t) = c_0\int_0^t \overline{F}(x)dx + c_1M\gamma_1\overline{F}(t) + c_3M\gamma_3F(t), \\ B(t) = \int_0^t \overline{F}(x)dx + \overline{F}(t)M\gamma_1 + F(t)M\gamma_3. \end{gathered} \tag{20}$$

Модель технического обслуживания системы как единого целого, у которой появившийся отказ самостоятельно не проявляется.

В начальный момент $t_0 = 0$ начинается эксплуатация системы и назначается плановое предупредительное обновление системы через время $\eta \geq 0$, распределенное по закону $G(t) = P\{\eta < t\}$, $G(0) = 0$. Если к назначенному моменту τ $(\eta = \tau)$ система не отказала, то в момент τ начинается плановое предупредительное обновление системы, которое по предположению полностью обновляет систему. Если до назначенного момента τ система отказала, то отказ не обнаруживается до назначенного момента τ, система до момента τ находится в состоянии скрытого отказа и только в момент τ начинается плановое аварийное обновление системы. После проведения возможных восстановительных работ, когда по предположению система полностью обновляется, осуществляется перепланирование момента проведения следующей предупредительной восстановительной работы и весь процесс обслуживания повторяется заново.

Математическое ожидание удельного дохода за единицу календарного времени определяется равенством, приведенном в работах [7] и [8]:

$$I(G)=\frac{\int\limits_0^{+\infty}\left[c_0\int\limits_0^t\bar{F}(x)dx+c_4\int\limits_0^t F(x)dx+c_1M\gamma_1\bar{F}(t)+c_2M\gamma_2F(t)\right]dG(t)}{\int\limits_0^{+\infty}\left[t+\bar{F}(t)M\gamma_1+F(t)M\gamma_2\right]dG(t)}. \tag{21}$$

Зададим две функции распределения (18) и найдем максимум функционала (21) по множеству распределений Ω_1.

По условиям теоремы и леммы необходимо исследовать функцию

$$C(t)=c_0\int\limits_0^t\bar{F}(x)dx+c_4\int\limits_0^t F(x)dx+c_1M\gamma_1\bar{F}(t)+c_2M\gamma_2F(t)-C\left[t+\bar{F}(t)M\gamma_1+F(t)M\gamma_2\right].$$

Пусть система стареющая и ее интенсивность отказов $\lambda(t)=\frac{1}{\bar{F}(t)}\frac{dF(t)}{dt}$ – неубывающая функция и исходные данные должны быть такими, что при оптимальном обслуживании функционирование системы должно приносить положительный эффект $C\geq 0$.

Анализируем свойства производной

$$\frac{dC(t)}{dt}=\left(c_4-C\right)+\bar{F}(t)\left\{\left(c_0-c_4\right)+\left[\left(c_2-C\right)M\gamma_2+\left(c_1-C\right)M\gamma_1\right]\lambda(t)\right\}. \tag{22}$$

При принятых ограничениях функция (22) невозрастающая, она либо сохраняет знак, либо один раз меняет знак с плюса на минус. Так как $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{dC(t)}{dt}<0$, то можно сделать вывод, что функция (22) либо сохраняет отрицательный знак, либо один раз меняет знак с плюса на минус. Таким образом доказано, что функция $C(t)$ имеет максимум в некоторой конечной точке, т.е. для функции $C(t)$ выполняются условия доказанной выше теоремы. Поэтому максимум функционала (21) достигается на функции (11), а параметр t_1 определяется как точка максимума функции

$$\frac{\int\limits_0^{\tau}A(t)dG_1(t)+A(\tau)\left(G_2(\tau)-G_1(\tau)\right)+\int\limits_{\tau}^{+\infty}A(t)dG_2(t)}{\int\limits_0^{\tau}AB(t)dG_1(t)+B(\tau)\left(G_2(\tau)-G_1(\tau)\right)+\int\limits_{\tau}^{+\infty}B(t)dG_2(t)},$$

при

$$A(t)=c_0\int\limits_0^t\bar{F}(x)dx+c_4\int\limits_0^t F(x)dx+c_1M\gamma_1\bar{F}(t)+c_2M\gamma_2F(t),$$

$$B(t)=t+\bar{F}(t)M\gamma_1+F(t)M\gamma_2.$$

2. **Управляемые модели безопасности**

С исследованными выше управляемыми моделями надежности тесно связаны модели безопасности. Технические системы осуществляют защиту информации, парируют угрозы нормальному процессу функционирования, которые могут создать злоумышленники. Поэтому качественное обслуживание систем защиты является первостепенной задачей в обеспечении безопасности функционирования любой системы [9, 10].

В описанный выше процесс проведения восстановительных работ введем процесс попыток нарушить штатный процесс функционирования исследуемой системы. Будем считать, что эти моменты попыток образуют пуассоновский поток с параметром λ. Из описания процесса функционирования системы и проведения восстановительных работ следует, что периоды исправного функционирования чередуются с периодами, когда в системе проводятся восстановительные работы или система находится в состоянии скрытого отказа (модель с отсутствием самостоятельной индикации отказа).

Попытку назовем успешной (катастрофой), если она попадает на период проведения восстановительных работ или на период скрытого отказа. Очевидно, необходимо максимизировать математическое ожидание времени до момента катастрофы.

Обозначим математическое ожидание времени до момента катастрофы при условии, что в начальный момент $t_0 = 0$ начинается эксплуатация новой системы $M_0(G)$, и поставим задачу *найти максимум* $\max_{G\in\Omega} M_0(G) = C = M_0(G^*)$ *и распределение* G^*, *на котором он достигается*.

Для модели с мгновенной индикацией отказа в работе [8] приведена зависимость этого математического ожидания от исходных характеристик

$$M_0(G) = \frac{\int_0^\infty [\int_0^u \bar{F}(y)dy + \bar{F}(u)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\bar{F}_1(t)dt + F(u)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\bar{F}_3(t)dt]dG(u)}{\int_0^\infty [1-\bar{F}(u)\int_0^\infty e^{-\lambda t}dF_1(t) - F(u)\int_0^\infty e^{-\lambda t}dF_3(t)]dG(u)}. \tag{23}$$

По условиям теоремы и леммы необходимо исследовать функцию

$$\begin{gathered} C(t) = \left[\int_0^t \bar{F}(x)dx + \bar{F}(t)\int_0^\infty e^{-\lambda x}\bar{F}_1(x)dx + F(t)\int_0^\infty e^{-\lambda x}\bar{F}_3(x)dx\right] - \\ -C\left[1-\bar{F}(t)\int_0^\infty e^{-\lambda x}dF_1(x) - F(t)\int_0^\infty e^{-\lambda x}dF_3(x)\right]. \end{gathered} \tag{24}$$

Далее отметим естественные физические предположения: система стареющая, т.е. опасность отказов $\lambda(t)$ – неубывающая функция, и внеплановый ремонт длится дольше планового, т.е. $F_1(x) \ge F_3(x),\ x \ge 0.$ Наконец, справедливо очевидное неравенство $1-\lambda C \le 0.$ В этих условиях производная

$$\frac{dC(t)}{dt} = \bar{F}(t)\left[1+(1-\lambda C)\lambda(t)\int_0^\infty e^{-\lambda x}\left(F_1(x)-F_3(x)\right)dx\right] \tag{25}$$

либо сохраняет знак, либо один раз меняет знак с плюса на минус. Таким образом доказано, что для функции $C(t)$ выполняются условия приведенной выше теоремы. Поэтому максимум функционала достигается на функции (11), для которой параметр t_1 определяется как точка максимума функции (21) при

$$A(t) = \int_0^t \bar{F}(x)dx + \int_0^\infty e^{-\lambda x}\bar{F}_1(x)dx + F(t)\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(F_1(x)-F_3(x)\right)dx,$$

$$B(t) = 1+\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda x}F_1(x)dx + F(t)\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda z}\left(F_1(x)-F_3(x)\right)dx.$$

Во всех примерах, если есть ограничения на математическое ожидание периодичности проведения восстановительных работ, необходимо вычислить первый момент для распределения (11) и сравнить с заданным значением.

Список литературы

1. Каштанов В. А., Зайцева О. Б. Исследование операций (линейное программирование и стохастические модели) : учебник. М. : ИНФРА-М, 2016. 256 с.
2. Каштанов В. А. О структуре функционала накопления, построенного на траекториях полумарковского процесса с конечным множеством состояний // Теория вероятностей и ее применения. 2015. Т. 60, № 2. С. 272–289.
3. Kashtanov V. A. Discrete distributions in control problems. Probabilistic methods in discrete mathematics // Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference. VSP, Utrecht, The Netherlands, 1997. P. 267–274.
4. Барзилович Е. Ю., Беляев Ю. К., Каштанов В. А. [и др.]. Вопросы математической теории надежности / под ред. Б. В. Гнеденко. М. : Радио и связь, 1983. 376 с.
5. Каштанов В. А., Зайцева О. Б., Ефремов А. А. Управляемые полумарковские процессы в условиях ограничений на стратегии управления и построение оптимальных стратегий в моделях надежности и безопасности // Математические заметки. 2021. № 109. С. 571–580.
6. Барзилович Е. Ю., Каштанов В. А. Некоторые математические вопросы теории обслуживания сложных систем. М. : Советское радио, 1971. 272 с.
7. Каштанов В. А., Медведев А. И. Теория надежности сложных систем. М. : Физматлит, 2010. 608 с.

8. Каштанов В. А. Стратегия технического обслуживания на основе полумарковских процессов с конечным множеством состояний // Надежность и качество сложных систем. 2013. № 1. С. 41–46.
9. Бецков А. В. Безопасность и надежность системы защиты объекта // Надежность и качество сложных систем. 2013. № 1. С. 35–40.
10. Зайцева О. Б., Каштанов В. А. О минимаксных подходах в задачах безопасности // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. Сер.: Математическое моделирование и информационные технологии. 2013. Вып. 4, № 1. С. 55–67.

References

1. Kashtanov V.A., Zaytseva O.B. *Issledovanie operatsiy (lineynoe programmirovanie i stokhasticheskie modeli): uchebnik = Operations Research (linear programming and stochastic models): textbook*. Moscow: INFRA-M, 2016:256. (In Russ.)
2. Kashtanov V.A. On the structure of the accumulation functional constructed on the trajectories of a semi-Markov process with a finite set of states. *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniya = Probability theory and its applications*. 2015;60(2):272–289. (In Russ.)
3. Kashtanov V.A. Discrete distributions in control problems. Probabilistic methods in discrete mathematics. *Proceedings of the Fourth International Petrozavodsk Conference*. VSP, Utrecht, The Netherlands. 1997:267–274.
4. Barzilovich E.Yu., Belyaev Yu.K., Kashtanov V.A. [et al.]. *Voprosy matematicheskoy teorii nadezhnosti = Questions of the mathematical theory of reliability*. Moscow: Radio i svyaz', 1983:376. (In Russ.)
5. Kashtanov V.A., Zaytseva O.B., Efremov A.A. Controlled semi-Markov processes under constraints on management strategies and the construction of optimal strategies in reliability and security models. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes*. 2021;(109):571–580. (In Russ.)
6. Barzilovich E.Yu., Kashtanov V.A. *Nekotorye matematicheskie voprosy teorii obsluzhivaniya slozhnykh system = Some mathematical questions of the theory of maintenance of complex systems*. Moscow: Sovetskoe radio, 1971:272. (In Russ.)
7. Kashtanov V.A., Medvedev A.I. *Teoriya nadezhnosti slozhnykh system = Theory of reliability of complex systems*. Moscow: Fizmatlit, 2010:608. (In Russ.)
8. Kashtanov V.A. Maintenance strategy based on semi-Markov processes with a finite set of states. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems*. 2013;(1):41–46. (In Russ.)
9. Betskov A.V. Safety and reliability of the object protection system. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2013;(1):35–40. (In Russ.)
10. Zaytseva O.B., Kashtanov V.A. About minimax approaches in security problems. *Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra Rossiyskoy akademii nauk. Ser.: Matematicheskoe modelirovanie i informatsionnye tekhnologii* = Proceedings of the Karelian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences. Ser.: Mathematical modeling and information Technologies. 2013;4(1):55–67. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Алексеевич Каштанов
доктор физико-математических наук, профессор,
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
(Россия, г. Москва, ул. Мясницкая, 20)
E-mail: vakashtanov@hse.ru

Viktor A. Kashtanov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor,
National Research University
"Higher School of Economics"
(20 Myasnitskaya street, Moscow, Russia)

Ольга Борисовна Зайцева
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теории вероятностей,
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)
(Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4)
E-mail: o_zaiceva@mail.ru

Ol'ga B. Zaytseva
Candidate of physical and mathematical sciences,
associate professor,
associate professor of sub-department
of probability theory,
Moscow Aviation Institute
(National Research University)
(4 Volokolamskoe highway, Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 20.03.2021
Поступила после рецензирования/Revised 30.03.2021
Принята к публикации/Accepted 31.03.2021