# ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАДАЮЩЕГО ТЕПЛОВОГО ПОТОКА КАК ФУНКЦИЯ ОТ ВРЕМЕНИ И КООРДИНАТЫ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

# Н.О.Борщев

Астрокосмический центр Учреждения Российской академии наук Физического института имени П. Н. Лебедева, Москва, Россия moriarty93@mail.ru

Аннотация. Актуальность и цели. Рассмотрен метод восстановления падающего теплового потока как функции от времени на примере виртуальной модели параллелепипеда. Цель данного метода состоит в отыскании глобального минимума параметрической величины теплового потока из задачи минимизации среднеквадратичной ошибки между теоретическим и экспериментальным полем температур в местах установки датчиков температур. *Материалы и методы*. Задачи такого типа являются некорректными из-за зашумленности или неоднозначности входных данных, таких как теплофизические свойства материалов, адекватность выбранной постановки «прямой» задачи теплообмена и т.д. Для этого в этой работе используется метод итерационной регуляризации для преодоления этой некорректности, где в качестве регуляризируемого параметра выступает номер итерации. Сама задача поиска глобального экстремума решается методом сопряженных направлений как наиболее точного метода первого порядка сходимости. *Результаты и выводы*. Разработан алгоритм параметрической идентификации.

**Ключевые слова**: граничная обратная задача теплопроводности, итерационная регуляризация, метод сопряженных направлений, базисная функция

Для цитирования: Борщев Н. О. Параметрическая идентификация падающего теплового потока как функция от времени и координаты методом итерационной регуляризации // Надежность и качество сложных систем. 2022. № 4. С. 15–23. doi:10.21685/2307-4205-2022-4-2

# PARAMETRIC IDENTIFICATION OF THE INCIDENT HEAT FLOW AS A FUNCTION OF TIME AND COORDINATES BY ITERATIVE REGULARIZATION

# N.O. Borshchev

Astro Space Center Institutions of the Russian Academy of Sciences P.N. Lebedev Institute of Physics, Moscow, Russia moriarty93@mail.ru

**Abstract.** *Background.* The method of restoring the incident heat flow as a function of time is considered on the example of a virtual model of a parallelepiped. The purpose of this method is to find the global minimum of the parametric value of the heat flow from the problem of minimizing the root-mean-square error between the theoretical and experimental temperature field in the places where temperature sensors are installed. *Materials and methods.* Tasks of this type are incorrect due to the noise or ambiguity of the input data, such as the thermophysical properties of materials, the adequacy of the chosen formulation of the "direct" heat transfer problem, etc. To do this, this paper uses the method of iterative regularization to overcome this incorrectness, where the iteration number acts as the regularized parameter. The very problem of finding a global extremum is solved by the conjugate directions method, as the most accurate method of the first order of convergence. *Results and conclusions.* An algorithm of parametric identification has been developed.

Keywords: boundary inverse heat conduction problem, iterative regularization, conjugate directions method, basis function

For citation: Borshchev N.O. Parametric identification of the incident heat flow as a function of time and coordinates by iterative regularization. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem* = *Reliability and quality of complex systems*. 2022;(4):15–23. (In Russ.). doi:10.21685/2307-4205-2022-4-2

<sup>©</sup> Борщев Н. О., 2022. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

#### Введение

При проектировании теплового режима космических аппаратов необходимо иметь информацию о коэффициентах теплопереноса внутри материала, значения начально-граничных условий и источников тепловыделений. При моделировании теплового режима изделий ракетно-космической техники важным вопросом является адекватное задание его геометрических и теплофизических характеристик исходя из характерных приходящих тепловых нагрузках.

Отсюда следует, что определение падающей тепловой нагрузки на примере при совершении им механической работы является актуальной задачей в обеспечении штатного теплового режима изделия. Огромный вклад в развитие методов идентификации задач теплопроводности внесли такие известные личности, как Алифанов О. М., Ненарокомов А. В., Сенкевич Е. А., Формалев В. Ф.

Задача данной работы состоит в восстановлении падающего теплового потока от пространства и времени, конкретнее, в отыскании его параметризированных величин при их аппроксимации кусочно-постоянными базисными функциями [1–4], описывающими его зависимость от времени, а также линейно-непрерывными базисными функциями, описывающими его зависимость от температуры. На основе разработанного алгоритма на примере виртуальной тепловой модели образца произвести апробацию данного метода.

Для этого сперва необходимо решить постановку «прямой» задачи прогрева изделия.

Постановка задачи исследования в приближении двумерного нагрева в ортотропном приближении [8–10] имеет следующий вид:

$$C(T)\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_{xx}(T)\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_{yy}(T)\frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial y} \right] + q_{w}(\tau).$$

Граничные условия будут иметь вид, характерный для теплофизических испытаний в естественных условиях:

$$\begin{split} \lambda_{xx}(T) \frac{\partial T(0, y, \tau)}{\partial x} &= q_{\text{mag}}(x, y, \tau) - \varepsilon(T) \Big( \sigma T(0, y, \tau)^4 - T_{\text{cp}}^4 \Big) - \alpha_{\kappa} \big( T(0, y, \tau) \big) \big( T(0, y, \tau) - T_{\text{cp}} \big); \\ &\frac{\partial T(l_x, y, \tau)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial T(x, 0, \tau)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial T(x, 0, \tau)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial T(x, l_y, \tau)}{\partial x} = 0; \\ &q_{\text{mag}}(T) \approx \sum_{m=1}^M q_{\text{mag}} N_m(x) N_m(\tau). \end{split}$$

В данной постановке задачи введены следующие обозначения:  $C_{s\phi}(T)$  – эффективная объемная теплоемкость материала,  $\frac{D_{K}}{K}$ ;  $\lambda_{xx}(T)$ ,  $\lambda_{yy}(T)$  – эффективная теплопроводность материала,  $\frac{B_{T}}{MK}$ ;  $T(x, y, \tau)$  – температура, K;  $\sigma$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $\frac{B_{T}}{M^{2}K^{4}}$ ;  $q_{w}$  – объемный источник тепловыделения, задаваемый по известной циклограмме, BT;  $q_{nag}$  – падающий удельный тепловой поток,  $\frac{B_{T}}{M^{2}}$ ;  $\alpha_{\kappa}(T(0, y, \tau))$  – коэффициент теплоотдачи материала к окружающей среде,  $\frac{B_{T}}{K \cdot M^{2}}$ .

Зависимость, по которой вычисляется коэффициент теплоотдачи, имеет следующий вид:

$$\alpha_{\kappa}(T) = Nu_{l}(T) \frac{\lambda_{\kappa}(T_{c})}{l_{s\phi}},$$

где  $\lambda_{\rm B}$  – коэффициент теплопроводности воздуха,  $\frac{{\rm BT}}{{\rm MK}}$ ;  $l_{\rm sop}$  – характерный размер (размер, вдоль которого дивжется тепловой конвективный поток, м;  $T_{\rm c}$  – температура окружающей среды, K;  ${\rm Nu}_{\rm I}(T)$ – критерий Нуссельта.

Схематичный вид объекта исследований представлен на рис. 1.



Рис. 1. Схематичный вид объекта исследований (звездочками показаны места расположения термопар)

Представим восстанавливаемый падающий удельный тепловой поток в виде

$$q_w(T) \approx \sum_{m=1}^M q_w N_m(T),$$

где  $N_m(T)$  – базисные функции, описывающие зависимость падающего теплового потока от координаты. В данной работе для координатной зависимости используются линейно-непрерывные базисные функции, имеющие следующий вид:

$$x = \begin{cases} \frac{x - x_0}{x_m - x_0}, & x \le x \le x_m; \\ \frac{x_l - x}{x_l - x_m}, & x_m \le x \le x_l. \end{cases}$$

Для временной зависимости используются кусочно-постоянные базисные функции, имеющие следующий вид:

$$N_{m}(\tau) = \begin{cases} 1, T < T_{m-1}, \\ 0, T > T_{m}, m = \overline{1, M}. \end{cases}$$

Рассмотрим восстановление искомых характеристик на основе среднеквадратичного функционала невязки между теоретическим и экспериментальным полем температур [12–17]:

$$S(q_{\text{mag}}) = \frac{1}{2} \int_{0}^{\tau_{\text{mag}}} \sum_{m=1}^{M} \left[ T(q_{\text{mag}}) - \tilde{T}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\tau}) \right]^2 d\tau.$$

В работе используется метод безусловной минимизации функционала  $S(q_{\text{пад}})$  с помощью метода сопряженных градиентов [14, 15] как наиболее точного метода первого порядка точности, позволяющего достичь требуемой сходимости за минимальное число итераций.

Последовательный алгоритм метода сопряженных градиентов можно представить в следующем виде на примере параметризированного коэффициента теплопроводности:

$$q_{\text{пад}}^{n+1} = q_{\text{пад}}^{n} + \Delta q_{\text{пад}}^{n+1},$$

где  $\Delta q_{\text{пад}}^{n+1} = -\beta_k p^{(n)};$ 

Направление спуска определяется из

$$\vec{p}^{n} = \operatorname{grad}S(q_{\max}^{n}) + \beta_{n}\vec{p}^{n-1}; \ \beta_{0} = 0, \ p^{(0)} = \operatorname{grad}S(q_{\max}^{(0)}); \ \beta_{n} = \frac{\left|\operatorname{grad}S(q_{\max}^{(n)})\right|^{2}}{\left|\operatorname{grad}S(q_{\max}^{(n-1)})\right|^{2}}$$

Критерием останова итерационного процесса является выражение:

$$\left|\operatorname{grad} S\left(q_{\operatorname{mag}}^{(0)}\right)\right| = \sqrt{\left\{\sum_{p=1}^{3} \left[\frac{\partial S\left(q_{\operatorname{mag}}^{(n)}\right)}{\partial q_{\operatorname{mag}}}\right]^{2}\right\}} \leq \delta_{sum},$$

где  $\delta_{sum}$  – погрешность входных данных, вычисленная в той же метрике, что и целевой функционал;

$$\delta_{sum} = \delta_a + \delta_f + \delta_{okp} + \delta_x,$$

где  $\delta_f$  – погрешность входных температур, определяемая следующими выражением:

$$\delta_f = \int_0^{\tau_{\max}} \sum_{i=1}^M \delta_L(\tau) d\tau.$$

Градиент целевого функционала имеет вид

$$\operatorname{grad} S\left(q_{\operatorname{max}}^{(n)}\right) = \int_{0}^{\tau_{\max}} \sum_{m=1}^{M} \left[T\left(q_{\operatorname{max}}\right) - \tilde{T}\left(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\tau}\right)\right] \frac{\partial T\left(q_{\operatorname{max}}\right)}{\partial q_{\operatorname{max}}} d\tau.$$

Для поиска компоненты градиента целевого функционала достаточно продифференцировать искомую постановку «прямой» задачи прогрева по параметрическому значению падающего теплового потока в каждом временном блоке. Получим

$$\frac{\partial C(T)}{\partial T} \frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} w(x, y, \tau) + C(T) \frac{\partial \omega(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \lambda_{xx}(T) \frac{\partial \omega(x, y, \tau)}{\partial x} + \omega(x, y, \tau) \frac{\partial \lambda_{xx}(T)}{\partial T} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \lambda_{yy}(T) \frac{\partial \omega(x, y, \tau)}{\partial y} + \omega(x, y, \tau) \frac{\partial \lambda_{yy}(T)}{\partial T} \right].$$

Граничные условия будут иметь следующий вид, характерный для низковакуумных испытаний:

$$\begin{split} \omega(0, y, \tau) \frac{\partial \lambda_{xx}(T)}{\partial T} + \lambda_{xx}(T) \frac{\partial \omega(0, y, \tau)}{\partial x} &= \sum_{m=1}^{M} N_m(x) N_m(\tau) - 4\varepsilon(T) \sigma T(0, y, \tau)^3 \omega(0, y, \tau) + \\ + \omega(0, y, \tau) \frac{\partial \varepsilon(T)}{\partial T} \sigma T(0, y, \tau)^4 - \left[ \alpha_{\kappa} \left( T(0, y, \tau) \right) \omega(0, y, \tau) + \frac{\partial \alpha_{\kappa} \left( T(0, y, \tau) \right)}{\partial T} \omega(0, y, \tau) \right] \\ &= \frac{\partial \omega(l_x, y, \tau)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial \omega(x, 0, \tau)}{\partial x} = 0; \ \frac{\partial \omega(x, l_y, \tau)}{\partial x} = 0. \end{split}$$

Данная постановка задачи решается конечно-разностным методом явной схемы, где конечноразностная аппроксимация температур в узлах уже известна из решения «прямой» задачи прогрева.

Для нахождения шага спуска, исходя из метода итерационной регуляризации [16–19], запишем выражение целевого функционала на следующей итерации:

$$S(q_{\text{пад}} + \Delta q_{\text{пад}}) = S(q_{\text{пад}}) - \alpha_{\text{сп}} \left[\frac{\partial S(q_{\text{пад}})}{\partial q_{\text{пад}}}\right]^{2};$$
  
$$S(q_{\text{пад}} + \Delta q_{\text{пад}}) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M} \int_{0}^{\tau_{\text{max}}} \left[T(q_{\text{пад}}) - \alpha_{\text{сп}} \frac{\partial T(q_{\text{пад}})}{\partial q_{\text{пад}}}\right]^{2} - \tilde{T}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\tau})\right]^{2} d\tau.$$

Откуда согласно принципу глобального минимума необходимо и достаточно приравнять полученное выражение к нулю и выразить шаг спуска. Получим

$$\alpha_{\rm cn} = \sum_{m=1}^{M} \int_{0}^{\tau_{\rm max}} \frac{T(q_{\rm max}) - \tilde{T}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\tau})}{\frac{\partial T(q_{\rm max})}{\partial q_{\rm max}}} d\tau$$

Таким образом, данный алгоритм включает в себя следующую последовательность действий:

1) задание начального приближения теплового падающего потока;

2) решение «прямой» задачи прогрева конструкции в одномерном приближении, моделируя условия наземной тепловой отработки изделия;

3) получение виртуального (экспериментального) температурного поля изделия в местах установки датчиков температур;

4) составление среднеквадратичной интегральной ошибки между теоретическим и экспериментальным температурным полем в местах установки датчиков температур;

5) решение сопряженной задачи по поиску компоненты градиента целевого функционала невязки между теоретическим и экспериментальным температурным полем;

6) вычисление шага спуска в методе сопряженных направлений на основе метода итерационной регуляризации;

7) получение следующего итерированного значения падающей тепловой нагрузки;

8) проверка критерия останова итерационного процесса. В случае его выполнения, параметризированные величины считаются искомыми, иначе необходимо повторно выполнить пункты 1–7.

Реализация решения данного алгоритма проиллюстрирована на блок-схеме на рис. 2.



Рис. 2. Блок-схема алгоритма восстановления падающего теплового потока

#### Результаты виртуальной экспериментальной тепловой отработки изделия

Для апробации данного алгоритма была создана конечно-элементная модель образца, выполненного в виде параллелепипеда, имитирующая постановку «прямой» задачи прогрева конструкции. На всем протяжении исследований данные о температуре поступают от двух конечных элементов (термодатчиков) по оси ординат и 13 конечным элементам (датчикам) по оси абсцисс. Показания термодатчиков фиксируются. Результаты замеров температур в зонах замера вдоль направления *х* показаны на рис. 3 для каждого из четырех временных блоков.



Рис. 3. Результаты замеров температурного поля в точках установки датчиков температур

# Результаты идентификации теплового падающего потока от времени и координаты методом итерационной регуляризации

Ниже на рис. 4 представлены температурные поля в каждом из временных блоков в точках установки датчиков температур, по которым оценивается разница температурного теоретического и экспериментального поля. Температурные различия с экспериментом обусловлены неточностью задания гранично-начальных условий расчета, а также критерием останова итерационного процесса.



Рис. 4. Результаты теоретического температурного поля в точках установки датчиков температур

На рис. 5 представлены значения среднеквадратичной ошибки, по которой наглядно видна сходимость теоретического температурного поля к экспериментальному в местах установки датчиков температур.

Как видно из графика, начиная со второй итерации, идет выход среднеквадратичного отклонения на свое постоянное значение, что говорит о приближении теоретического температурного поля к экспериментальному.



Рис. 5. Среднеквадратичная ошибка между теоретическим и экспериментальным температурным полем

На рис. 6 представлены итерационные изменения падающего удельного теплового потока в каждом временном блоке в зависимости от номера итерации.



Рис. 6. Итерационные изменения параметризированной величины теплового падающего потока

Из графика видно, что параметризированная величина теплового потока начинает сходиться к своему постоянному значению, начиная со второй итерации.

На рис. 7 представлена полученная циклограмма падающего теплового удельного потока объекта исследования от времени для всех четырех временных блоков.



Рис. 7. Значения восстановленного падающего удельного теплового потока от координаты для каждого временного блока

## Заключение

1. Разработан алгоритм параметрической идентификации падающего теплового потока как функции от времени и координаты методом итерационной регуляризации.

2. Произведена апробация разработанного алгоритма на примере виртуальной тепловой модели образца, выполненного в форме параллелепипеда.

3. Результаты показали, что значения падающего теплового потока в зависимости от координаты и времени будут лежать в пределах 0–23 Вт/м<sup>2</sup>.

### Список литературы

- 1. Крейн С. Г., Прозоровская О. И. Аналитические полугруппы и некорректные задачи для эволюционных уравнений // Доклады Академии наук СССР. 1960. Т. 133, № 2. С. 277–280.
- 2. Басистов Ю. А., Яновский Ю. Г. Некорректные задачи в механике (реологии) вязкоупругих сред и их регуляризация // Механика композиционных материалов и конструкций. 2010. Т. 16, № 1. С. 117–143.
- 3. Бакушинский А. Б., Кокурин М. Ю., Кокурин М. М. Прямые и обратные теоремы для итерационных методов решения нерегулярных операторных уравнений и разностных методов решения некорректных задач Коши // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60, № 6. С. 939–962.
- 4. Фанов В. В., Мартынов М. Б., Карчаев Х. Ж. Летательные аппараты НПО им. С.А. Лавочкина (к 80-летию предприятия) // Вестник НПО им. С. А. Лавочкина. 2017. № 2/36. С. 5–16.
- 5. Блох А. Г., Журавлев Ю. А., Рыжков Л. Н. Теплообмен излучением. М. : Энергоатомиздат, 1991.
- 6. Тулин Д. В., Финченко В. С. Теоретико-экспериментальные методы проектирования систем обеспечения теплового режима космических аппаратов. М. : МАИ-ПРИНТ, 2014. Т. 3. С. 1320–1437.
- 7. Цаплин С. В., Болычев С. А., Романов А. Е. Теплообмен в космосе. Самара : Самарский университет, 2013. 53 с.
- 8. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М. : Наука, 1988. 288 с.
- 9. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. М. : Машиностроение, 1988. 280 с.
- 10. Формалев В. Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. М. : Физматлит, 2015. 238 с.
- 11. Васин В. В. Модифицированный метод наискорейшего спуска для нелинейных регулярных операторных уравнений // Доклады Академии наук. 2015. Т. 462, № 3. С. 264.
- Голичев И. И. Модифицированный градиентный метод наискорейшего спуска решения нелениаризованной задачи для нестационарных уравнений Навье-Стокса // Уфимский математический журнал. 2013. Т. 5, № 4. С. 60–76.
- 13. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М. : Физматлит, 2004. 400 с.
- 14. Формалев В. Ф. Анализ двумерных температурных полей в анизотропных телах с учетом подвижных границ и большой степени анизотропии // Теплофизика высоких температур. 1990. Т. 28, № 4. С. 715–721.
- 15. Формалев В. Ф. Идентификация двумерных тепловых потоков в анизотропных телах сложной формы // Инженерно-физический журнал. 1989. Т. 56, № 3. С. 382–386.
- 16. Формалев В. Ф., Колесник С. А. Аналитическое решение второй начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 6. С. 107–110.

#### References

- 1. Kreyn S.G., Prozorovskaya O.I. Analytical semigroups and ill-posed problems for evolutionary equations. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 1960;133(2):277–280. (In Russ.)
- 2. Basistov Yu.A., Yanovskiy Yu.G. Incorrect problems in mechanics (rheology) of viscoelastic media and their regularization. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy = Mechanics of composite materials and structures*. 2010;16(1):117–143. (In Russ.)
- 3. Bakushinskiy A.B., Kokurin M.Yu., Kokurin M.M. Direct and inverse theorems for iterative methods for solving irregular operator equations and difference methods for solving ill-posed Cauchy problems. *Zhurnal vychislit-el'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2020;60(6):939–962. (In Russ.)
- 4. Fanov V.V., Martynov M.B., Karchaev Kh.Zh. Lavochkin NGO (to the 80th anniversary of the enterprise). *Vestnik NPO im. S.A. Lavochkina = Bulletin of S. A. Lavochkin NGO*. 2017;(2/36):5–16. (In Russ.)
- 5. Blokh A.G., Zhuravlev Yu.A., Ryzhkov L.N. *Teploobmen izlucheniem = Heat exchange by radiation*. Moscow: Energoatomizdat, 1991. (In Russ.)
- 6. Tulin D.V., Finchenko V.S. Teoretiko-eksperimental'nye metody proektirovaniya sistem obespecheniya teplovogo rezhima kosmicheskikh apparatov = Theoretical and experimental methods of designing systems for ensuring the thermal regime of spacecraft. Moscow: MAI-PRINT, 2014;3:1320–1437. (In Russ.)

- 7. Tsaplin S.V., Bolychev S.A., Romanov A.E. *Teploobmen v kosmose = Heat transfer in space*. Samara: Samarskiy universitet, 2013:53. (In Russ.)
- 8. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach = Extreme methods for solving ill-posed problems*. Moscow: Nauka, 1988:288. (In Russ.)
- 9. Alifanov O.M. Obratnye zadachi teploobmena = Inverse heat transfer problems. Moscow: Mashinostroenie, 1988:280. (In Russ.)
- 10. Formalev V.F. *Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh = Heat transfer in anisotropic solids*. Moscow: Fizmatlit, 2015:238. (In Russ.)
- 11. Vasin V.V. Modified steepest descent method for nonlinear regular operator equations. *Doklady Akademii nauk* = *Reports of the Academy of Sciences*. 2015;462(3):264. (In Russ.)
- 12. Golichev I.I. Modified gradient method of the steepest descent of the solution of the non-leniarized problem for unsteady Navier-Stokes equations. *Ufimskiy matematicheskiy zhurnal = Ufa Mathematical Journal*. 2013;5(4):60–76. (In Russ.)
- 13. Formalev V.F., Reviznikov D.L. Chislennye metody = Numerical methods. Moscow: Fizmatlit, 2004:400. (In Russ.)
- 14. Formalev V.F. Analysis of two-dimensional temperature fields in anisotropic bodies taking into account moving boundaries and a large degree of anisotropy. *Teplofizika vysokikh temperature = Thermophysics of high temperatures*. 1990;28(4):715–721. (In Russ.)
- 15. Formalev V.F. Identification of two-dimensional heat flows in anisotropic bodies of complex shape. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and Physics journal*. 1989;56(3):382–386. (In Russ.)
- 16. Formalev V.F., Kolesnik S.A. Analytical solution of the second initial boundary value problem of anisotropic thermal conductivity. *Matematicheskoe modelirovanie* = *Mathematical modeling*. 2003;15(6):107–110. (In Russ.)

# Информация об авторах / Information about the authors

## Никита Олегович Борщев

кандидат технических наук, ведущий инженер, Астрокосмический центр Учреждения Российской академии наук

Физического института имени П. Н. Лебедева

(Россия, г. Москва, Ленинский пр-т, 53)

E-mail: moriarty93@mail.ru

# Nikita O. Borshchev

Candidate of technical sciences, leading engineer, Astro Space Center Institutions of the Russian Academy of Sciences P.N. Lebedev Institute of Physics (53 Leninsky avenue, Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 16.03.2022 Поступила после рецензирования/Revised 11.04.2022 Принята к публикации/Accepted 13.05.2022