УДК 519.622.2
doi:10.21685/2307-4205-2023-2-3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОТОТИПИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПУТЕМ КАЧЕСТВЕННОГО АНАЛИЗА ЭТИХ УРАВНЕНИЙ

И. Е. Старостин[1], А. А. Дружинин[2]

[1, 2] Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия
[1] starostinigo@yandex.ru, [2] alexs20017@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Решение задачи выбора оптимальных параметров, а также диагностики и прогнозирования технического состояния компонентов авиационного оборудования обусловливает необходимость построения моделей таких компонентов. На вход моделей подаются измеряемые характеристики, а на выходе получаются контролируемые характеристики. Авторами был предложен метод математического прототипирования энергетических процессов, позволяющих строить адекватные математические модели (не противоречащие общим физическим законам) динамики физических и химических процессов различной природы. Затем эти уравнения преобразовываются к моделям, непосредственно используемым для решения упомянутых практических задач. Для упрощения вычислений необходимо корректное задание аналитического приближения решений дифференциальных уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов. Это и обусловливает актуальность упомянутой задачи. *Материалы и методы.* В случае использования специальных методов решения системы дифференциальных уравнений необходимо задать приближенное аналитическое выражение решения (общего или частного) искомой системы, коэффициенты которого определяются из системы уравнений. Аналитическое приближение решения систем дифференциальных уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов базируется на концепции стремления системы к некоторому стационарному состоянию, изменяющемуся в результате обратной связи. *Результаты.* Предложенная методика задания аналитического приближения решений уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов дает возможность задания класса корректных математических моделей (не противоречащих общим физическим законам, а также особенностям протекания физических и химических процессов в конкретной рассматриваемой системе) различных компонентов авиационного оборудования. В таком классе строятся модели (методами теории идентификации, машинного обучения и т.д.) с наименьшими вычислительными затратами. *Выводы.* Качественный анализ уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов дает возможность задания максимально суженного класса математических моделей, в котором строится адекватная математическая модель требуемой точности произвольной системы с наименьшими вычислительными затратами.

Ключевые слова: метод математического прототипирования энергетических процессов, интегрирование дифференциальных уравнений, машинное обучение

Для цитирования: Старостин И. Е., Дружинин А. А. Аналитическое приближение решений уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов путем качественного анализа этих уравнений // Надежность и качество сложных систем. 2023. № 2. С. 22–31. doi:10.21685/2307-4205-2023-2-3

ANALYTICAL APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF EQUATIONS OF THE METHOD OF MATHEMATICAL PROTOTYPING OF ENERGY PROCESSES BY QUALITATIVE ANALYSIS OF THESE EQUATIONS

I.E. Starostin[1], A.A. Druzhinin [2]

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia
[1] starostinigo@yandex.ru, [2] alexs20017@mail.ru

Abstract. *Background.* Solving the problem of choosing the optimal parameters, as well as diagnosing and predicting the technical condition of aircraft equipment components, necessitates the construction of a model of this components. At the input of the models, the measured characteristics are fed, and the controlled characteristics are obtained at the output. The authors proposed a method of mathematical prototyping of energy processes, allowing to build adequate mathematical models (which do not contradict the general physical laws) of the dynamics of physical and chemical processes of various nature. Then these equations are converted to models that are directly used to solve the mentioned practical problems. To simplify calculations, it is necessary to correctly set the analytical approximation of solutions to differential equations of the method of mathematical prototyping of energy processes. This determines the urgency of the mentioned problem. *Matherials and methods.* In the case of using special methods for solving a system of differential equations, it is necessary to specify an approximate analytical expression for the solution (general or particular) of the system being solved, the coefficients of which are determined from the system of equations being solved. The analytical approximation of the solution of systems of differential equations of the method of mathematical prototyping of energy processes is based on the concept of the system tending to some stationary state, which changes as a result of feedback. *Results.* The proposed method for setting the analytical approximation of solutions to the equations of the method of mathematical prototyping of energy processes makes it possible to set a class of correct mathematical models (which do not contradict the general physical laws, as well as the features of the flow of physical and chemical processes in a particular system under consideration) of various components of aviation equipment. In such a class, models are built (methods of identification theory, machine learning, etc.) with the lowest computational costs. *Conclusions.* Qualitative analysis of the equations of the method of mathematical prototyping of energy processes makes it possible to specify the most narrowed class of mathematical models, in which an adequate mathematical model of the required accuracy of an arbitrary system is built with the lowest computational costs.

Keywords: method of mathematical prototyping of energy processes, integration of differential equations, machine learning

For citation: Starostin I.E., Druzhinin A.A. Analytical approximation of solutions of equations of the method of mathematical prototyping of energy processes by qualitative analysis of these equations. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2023;(2):22–31. (In Russ.). doi:10.21685/2307-4205-2023-2-3

Введение

Построение математических моделей технических систем, в том числе и компонентов авиационного оборудования, имеет важное значение для решения задач проектирования и эксплуатации систем [1–4]. На вход таких моделей систем подаются измеряемые характеристики, параметры режимов работы, а на выходе получаем контрольные характеристики исследуемого объекта, необходимые для решения упомянутых практических задач [1–4].

Для построения упомянутых моделей систем авторами был предложен метод математического прототипирования энергетических процессов, в основу которого положены методы механики теории электрических и магнитных цепей, электродинамики, современной неравновесной термодинамики [5–8]. Предложенный метод представляет собой систему дифференциальных уравнений, численное решение которой универсальными (шаговыми) методами трудоемко [9]. Этого недостатка лишены специальные методы решения [9], основанные на аналитическом задании решений таких систем [9]. Аналитическое задание решения должно вбирать в себя особенности динамики, моделируемой решаемой системой дифференциальных уравнений [9]. Настоящая работа посвящена специальным методам решения уравнений динамики процессов, полученных методом математического прототипирования.

Материалы и методы

Система уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов имеет вид [5]

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \mathrm{B}\left(\overline{\mathbf{x}}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}\right)\frac{\delta\Delta\mathrm{x}(t)}{dt} + \left(\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt}\right)_{ext}, \tag{1}$$

$$\frac{\delta\Delta\mathrm{x}(t)}{dt} = \Delta\mathrm{A}\left(\overline{\mathbf{x}}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}\right)\Delta\mathrm{X}\left(\overline{\mathbf{x}}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}\right), \tag{2}$$

$$\Delta\mathrm{X}\left(\overline{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}\right) = \mathbf{B}^T\left(\overline{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}\right)\overline{X}\left(\overline{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}\right),\ \overline{\mathbf{X}}\left(\overline{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}\right) = -\nabla_{\overline{\mathbf{x}}}F\left(\overline{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}\right), \tag{3}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{g}_{\mathbf{r}}\left(\overline{\mathbf{x}}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}\right),\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{g}_{\mathbf{z}}\left(\overline{\mathbf{x}}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}\right), \tag{4}$$

где $\overline{\mathbf{x}}$ – параметры состояния системы; $\Delta\mathrm{x}$ – координаты процессов в системе; $\delta\Delta\mathrm{x}(t)/dt$ – скорости протекания физико-математических процессов (ФХП) в системе; $\mathbf{B}(\overline{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ – топологическая матрица системы, определяемая структурой системы и процессами в ней, законами сохранения; $\left(d\overline{\mathbf{x}}(t)/dt\right)_{ext}$

– внешние потоки в систему (и их случайная составляющая [5]); $\Delta X(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ – внутренние возмущения, движущие процессы в системе; $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ – частные производные свободной энергии $F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ по параметрам состояния $\bar{\mathbf{x}}$; $\Delta\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ – положительно определенная диссипативная матрица (или неотрицательно определенная невырожденная матрица в случае наличия инерционностей в системе [5, 6]); U – параметры системы, меняющиеся только в результате внешних воздействий на нее; $\mathbf{p}$ – индивидуальные параметры системы, меняющиеся от экземпляра к экземпляру системы конкретного типа; r, z – измеряемые и контролируемые характеристики системы соответственно. Параметры состояния $\bar{\mathbf{x}}$ могут быть как координатами состояния – параметрами состояния, приращение которых обусловлено только протеканием процессов одного конкретного класса [6–8], так и параметрами состояния, имеющими практический смысл [5].

Для получения системы уравнений (1)–(3) метода математического прототипирования в численном виде необходимо задать функциональные разложения для следующих величин [5–7]:

– топологической матрицы $\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$:

$$\mathbf{B}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = \mathbf{B}\left(\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}), \tilde{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right), \tag{5}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = \tilde{\mathbf{B}}^{(0)}\left(\mathbf{h}_{\mathrm{B}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right) + \sum_{i=1}^{N_{\mathbf{B}}} \tilde{\mathbf{B}}_i \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{h_{\mathbf{B},j}^{n_{\mathbf{B},i,j}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})}{n_{\mathbf{B},i,j}!} \right), \; m = \dim(\bar{\mathbf{x}}), \tag{6}$$

где $\tilde{\mathbf{B}}^{(0)}\left(\mathbf{h}_{\mathrm{B}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right)$ – базовая составляющая независимой составляющей $\tilde{\mathbf{B}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ матрицы баланса, а функции $\mathbf{h}_{\mathrm{B}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ определяют довесочные составляющие матрицы баланса;

– диссипативной матрицы $\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$:

$$\Delta\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = \Delta\mathbf{A}^{(0)}\left(\mathbf{h}_{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right) + \sum_{i=1}^{N_{\mathbf{A}}} \Delta\tilde{\mathbf{A}}_i \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{h_{\mathbf{A},j}^{n_{\mathbf{A},i,j}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})}{n_{\mathbf{A},i,j}!} \right), \tag{7}$$

где положительно определенная (или невырожденная неотрицательно определенная в случае наличия в системе инерционности) матрица $\Delta\mathbf{A}^{(0)}\left(\mathbf{h}_{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right)$ – базовая составляющая диссипативной матрицы, а неотрицательные функции $\mathbf{h}_{\mathbf{A}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ определяют довесочные составляющие диссипативной матрицы;

– свободной энергии $F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ или ее частных производных $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ по параметрам состояния x:

$$F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = F^{(0)}\left(\mathbf{h}_F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right) + \sum_{i=1}^{N_F} \tilde{F}_i \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{h_{F,j}^{n_{F,i,j}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})}{n_{F,i,j}!} \right), \tag{8}$$

$$\bar{X}_k(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = \bar{X}_k^{(0)}\left(\mathbf{h}_F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right) + \sum_{i=1}^{N_F} \tilde{F}_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\prod_{j=1}^{m} \frac{h_{F,j}^{n_{F,i,j}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})}{n_{F,i,j}!} \right), \; k = \overline{1,m}, \tag{9}$$

где $F^{(0)}\left(\mathbf{h}_F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right)$ – базовая составляющая свободной энергии, удовлетворяющая полному дифференциалу по $\bar{\mathbf{x}}$ функции $\bar{X}_k^{(0)}\left(\mathbf{h}_F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right)$, $k = \overline{1,m}$ – базовые составляющие частных производных свободной энергии, а функции $\mathbf{h}_F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ определяют довесочные составляющие свободной энергии.

В выражениях (6)–(9) постоянные матрицы $\tilde{\mathbf{B}}_i$, $i = \overline{1, N_{\mathbf{B}}}$, неотрицательно определенные $\Delta\tilde{\mathbf{A}}_i$, $i = \overline{1, N_{\mathbf{A}}}$ и постоянные коэффициенты $\tilde{F}_i$, $i = \overline{1, N_F}$, постоянные для всех объектов систем рассматриваемого бренда, определяются из экспериментальных данных. Нетрудно видеть, что задаваемые в виде выражения (9) функциональные разложения частных производных $\bar{\mathbf{X}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ свободной энергии $F(\bar{\mathbf{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$, вытекающие из выражения (8), гарантированно удовлетворяют условию полного дифференциала, что гарантирует существование функции свободной энергии $F(\mathbf{\bar{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$. В уравнениях (1), (5), (6) зашиты законы сохранения [6]. Также задаваемое (7) функциональное разложение диссипативной матрицы $\Delta\mathbf{A}(\mathbf{\bar{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ гарантирует ее положительную определенность (или неотрицательную определенность и невырожденность в случае наличия в системе инерционности) [5, 6]. Отсюда из уравнений (1)–(3) вытекает удовлетворяемость (1)–(7), (9) второму началу термодинамики [5, 6].

Также в функциональные разложения (6), (7), (9) могут быть заложены особенности протекания процессов в конкретной системе [5, 7]. Функциональные разложения (6), (7), (9), построенные в соответствии с теоремой Вейерштрасса о равномерном приближении функции полиномами [5, 7, 10], дают возможность строить в соответствии с (1)–(7), (9) сколь угодно точные функции состояния для соответсвующих величин. Таким образом, модели (1)–(7), (9) являются корректными и могут быть построены из экспериментальных данных с требуемой точностью [5–7].

Для качественного анализа динамики представим координаты состояния $\mathbf{\bar{x}} = (\mathbf{x}^T, \mathrm{U}, \mathbf{y}^T)^T$ в виде совокупности не зависимых параметров состояния (не связанных законами сохранения с параметрами баланса $\mathbf{P}$) $\mathbf{x}$ и зависимых параметров состояния $\mathbf{y}$, связанных с $\mathbf{x}$ и $\mathbf{P}$ законами сохранения [5, 6]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, \mathrm{U}, \mathbf{p}). \tag{10}$$

Затем, представив топологическую матрицу $\mathbf{B}(\mathbf{\bar{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ и $(d\mathbf{\bar{x}}(t)/dt)_{ext}$ в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{\bar{x}}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = \left(\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) \quad \mathbf{B}_{\mathbf{y}}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\right)^T, \tag{11}$$

$$\left(\frac{d\mathbf{\bar{x}}(t)}{dt}\right)_{ext} = \left(\left(\frac{d\mathbf{x}^T(t)}{dt}\right)_{ext} \quad \left(\frac{d\mathbf{y}^T(t)}{dt}\right)_{ext}\right)^T, \tag{12}$$

система уравнений (1) представляется в виде [6]

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p})\frac{\delta\Delta\mathrm{x}(t)}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right)_{ext}, \tag{13}$$

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = \mathbf{B}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p})\frac{\delta\Delta\mathrm{x}(t)}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}\right)_{ext}. \tag{14}$$

Учитывая, что в случае отсутствия внешних потоков в систему ее параметры баланса $\mathbf{P}$ неизменны, для внутренних возмущений $\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$, сопряженных независимым параметрам состояния $\mathbf{x}$, определяемых с учетом уравнения законов сохранения (10) в силу [6]:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = -\nabla_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, \mathrm{U}, \mathbf{p}), \mathrm{U}, \mathbf{p}), \tag{15}$$

имеем с учетом уравнений сохранения и в силу независимости вариаций $\delta\Delta\mathrm{x}$ [6]:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, \mathrm{U}, \mathbf{p}), \mathrm{U}, \mathbf{p})\mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = \Delta\mathrm{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{P}, \mathrm{U}, \mathbf{p}), \mathrm{U}, \mathbf{p}). \tag{16}$$

Учитывая, что параметры баланса могут меняться только в результате внешних потоков, имеем [11]

$$\mathbf{J}_{\mathbf{P},\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) + \mathbf{J}_{\mathbf{P},\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p})\mathbf{B}_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p}) = 0,$$

где $\mathbf{J}_{\mathbf{P},\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$, $\mathbf{J}_{\mathbf{P},\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$ – матрицы Якоби функции параметров баланса $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathrm{U}, \mathbf{p})$, получаемой из (10); отсюда имеем в силу (10), (13), (14) окончательно для параметров баланса [11]

$$\frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{J}_{\mathbf{P},\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(\mathbf{x}(t), \mathbf{P}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}), \mathrm{U}(t), \mathbf{p})\left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right)_{ext} +$$

$$+ \mathbf{J}_{\mathbf{P},\mathbf{y}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(\mathbf{x}(t), \mathbf{P}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}), \mathrm{U}(t), \mathbf{p})\left(\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt}\right)_{ext}. \tag{17}$$

Введя диссипативную матрицу $\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathbf{p})$, сопряженную независимым параметрам состояния $\mathbf{x}$, в виде [6]

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p})=\mathbf{B}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p}),\mathrm{U},\mathbf{p})\Delta\mathrm{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p}),\mathrm{U},\mathbf{p})\mathbf{B}_{\mathbf{x}}^{T}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p}),\mathrm{U},\mathbf{p}), \tag{18}$$

имеем в силу (2), (10), (13), (16) [6,11,12]:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=\mathbf{A}(\mathbf{x}(t),\mathbf{P}(t),\mathrm{U}(t),\mathbf{p})\big(\mathbf{X}(\mathbf{x}(t),\mathbf{P}(t),\mathrm{U}(t),\mathbf{p})+\mathbf{X}_{ext}(\mathbf{x}(t),\mathbf{P}(t),\mathrm{U}(t),\mathbf{s}(t),\mathbf{p})\big), \tag{19}$$

где $\mathbf{X}_{ext}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{s},\mathbf{p})$ – внешние силы, определяемые в соответствие с работами [11, 12]:

$$\mathbf{X}_{ext}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{s},\mathbf{p})=\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p})\left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right)_{ext}; \tag{20}$$

$\mathbf{s}$ – параметры внешних потоков, меняющихся во времени. Приведенные преобразования могут быть выполнены как для исходной системы уравнений (1)–(7), (9), так и для упрощенной, получаемой путем замены в уравнениях (6), (7), (9) базисов [10] с обнулением части постоянных параметров в новом базисе [5].

Композиция функций для диссипативной матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p})$ и внешних сил $\mathbf{X}_{ext}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p})$ задается в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p})=\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p}),\mathbf{p}), \tag{21}$$

$$\mathbf{X}_{ext}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p})=\mathbf{X}_{ext}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathrm{v}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p}),\mathrm{s},\mathbf{p}), \tag{22}$$

таком, что при любых фиксированных $\mathbf{w}^*$ диссипативная матрица $\mathbf{A}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{w}^*,\mathbf{p})$ также положительно определена (или невырожденна и неотрицательно определена в случае инерционности), а также при любых фиксированных $\mathbf{v}^*$ и $\mathbf{s}^*$ внешние силы $\mathbf{X}_{ext}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p})$ потенциальны по $\mathbf{x}$, т.е. существует такая скалярная функция $G(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p})$, что

$$\mathbf{X}_{ext}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p})=-\nabla_{\mathbf{x}}G(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p}). \tag{23}$$

Введя обобщенную свободную энергию $\tilde{F}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p})$ [11, 12] в силу:

$$\tilde{F}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p})=F(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p}),\mathrm{U},\mathbf{p})+G(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p}), \tag{24}$$

задав области локально постоянных параметров $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{s}^*$, а также параметров баланса $\mathbf{P}^*$ и параметров условий протекания процессов $\mathbf{U}^*$, имеем согласно выражениям (15), (19) – (24) для каждой из таких областей [11, 12]:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}=-\mathbf{A}(\mathbf{x}(t),\mathbf{P}^*,\mathbf{U}^*,\mathbf{w}^*,\mathbf{p})\nabla_{\mathbf{x}}\tilde{F}(\mathbf{x},\mathbf{P}^*,\mathbf{U}^*,\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}. \tag{25}$$

Из преобразований (10)–(25) видно, что при стягивании областей постоянства параметров $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{U}^*$ в точки, т.е. при $\mathbf{w}^*\to\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p})$, $\mathbf{v}^*\to\mathrm{v}(\mathbf{x},\mathbf{P},\mathrm{U},\mathbf{p})$, $\mathbf{s}^*\to\mathbf{s}$, $\mathbf{P}^*\to\mathbf{P}$, $\mathbf{U}^*\to\mathbf{U}$ система уравнений (17), (25) эквивалентна системе уравнений (1) – (3) [11].

Из уравнения (25) видно, что динамика системы обусловливается стремлением системы в стационарное состояние, которое из-за перехода в другую область постоянства параметров $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{U}^*$ изменяется [11, 12]. Отсюда аналитическое выражение решения (приближенного) задается в виде [13]

$$\mathbf{x}^{(0)}(t)=\sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}}}\tilde{\mathbf{x}}_i^{(0)}\varphi_i\left(\theta_i\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_0,t),\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}\right)-\Delta\theta_i\left(\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}\right),\boldsymbol{\gamma}\right)+\mathbf{x}^*\left(\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}\right), \quad (26)$$

где постоянные параметры $\boldsymbol{\gamma}$, $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(0)}$, $i=1,N_{\mathbf{x}}$ определяются из выражения (25); кусочно постоянные параметры $\mathbf{q}^*=\mathbf{q}^*\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{P}^*,\mathbf{U}^*\right)$ характеризуют локальную область постоянства параметров $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{U}^*$; $\mathbf{x}^*\left(\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}\right)$ характеризует стационарное состояние, соответствующее области постоянства параметров $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{U}^*$; функция $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_0,t)$ определяется согласно [13]:

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_0,t)=\boldsymbol{\alpha}\left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i+\epsilon_i(t),t\right),\ t\in\left(t_i,t_{i+1}\right),\ \bar{\boldsymbol{\alpha}}_{i+1}=\boldsymbol{\alpha}\left(\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i+\epsilon_i(t_{i+1}),t_{i+1}\right),\ i=1,\infty, \quad (27)$$

функция $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}_0,t)$, для которой $\dim(\boldsymbol{\alpha})=\dim(\mathbf{x})$, обладает свойством группы [13, 14] и имеет предел [13]:

$$\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}_0,0)\equiv\boldsymbol{\alpha}_0,\ \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}_0,\tau),t\right)\equiv\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}_0,t+\tau),\ \exists\lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}_0,t)=\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\alpha}_0), \quad (28)$$

который может быть как конечным, так и бесконечным; каждая функция $\theta_i\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}\right)$, $i=1,N_{\mathbf{x}}$ и $\varphi_i(\theta,\boldsymbol{\gamma})$, $i=1,N_{\mathbf{x}}$ имеет предел [13]:

$$\exists\lim_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\to\boldsymbol{\alpha}^*}\theta_i\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}\right)=\hat{\theta}_i\left(\boldsymbol{\alpha}^*,\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}\right),\ i=1,N_{\mathbf{x}}, \quad (29)$$

$$\exists\lim_{\theta\to\hat{\theta}}\varphi_i(\theta,\boldsymbol{\gamma})=\hat{\varphi}_i\left(\hat{\theta},\boldsymbol{\gamma}\right)\neq\infty,\ i=1,N_{\mathbf{x}}. \quad (30)$$

Пределы $\hat{\theta}_i\left(\boldsymbol{\alpha}^*,\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^*,\boldsymbol{\gamma}\right)$, $i=1,N_{\mathbf{x}}$ могут быть как конечными, так и бесконечными [13]. Более того, на выражение (26) накладываются дополнительные ограничения в виде взаимной однозначности между $\mathbf{x}^{(0)}$ и $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$. Отсюда выражение (26) относительно t также является группой, а значит, является общим решением автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [14]. Из выражений (27)–(30) вытекает при фиксированных $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{q}^*$ асимптотическая устойчивость $\mathbf{x}^{(0)}(t)$ в силу (26) при $t\to+\infty$ [13]. Отсюда вытекает существование функции Ляпунова второго рода [6, 15], которой является обобщенная свободная энергия $\tilde{F}\left(\mathbf{x},\mathbf{P}^*,\mathbf{U}^*,\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{p}\right)$ [6, 13]. А значит, существует положительно определенная диссипативная матрица $\mathbf{A}\left(\mathbf{x},\mathbf{P}^*,\mathbf{U}^*,\mathbf{w}^*,\mathbf{p}\right)$, удовлетворяющая (25) [6]. Отсюда вытекает существование такого дифференциального уравнения (25), общим решением которого является выражение (26) [13].

Разбив независимые параметры состояния $\mathbf{x}$ на блоки, перепишем уравнение (25) в блочном виде и, используя коэффициенты эквивалентности внутренних возмущений [6], введя перекрестные возмущения [6], получим для каждого блока уравнения, аналогичные уравнению (19) [6]. Затем, используя преобразования, аналогичные (19)–(25), получим для каждого i-го блока $\mathbf{x}^{(i)}$ независимых координат состояния $\mathbf{x}$ уравнения, аналогичные уравнению (25). Таким образом, для каждого i-го блока $\mathbf{x}^{(i)}$ аналитическое приближение решения аналогично уравнению (26):

$$\mathbf{x}^{(0,j)}(t)=\sum_{i=1}^{N_{\mathbf{x}}}\tilde{\mathbf{x}}_i^{(0,j)}\varphi_{i,j}\left(\tilde{\theta}_{i,j}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\alpha}_0,t),\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right),\boldsymbol{\gamma}\right)+\mathbf{x}^{*(j)}\left(\tilde{\mathbf{q}}^{*(j)}(t),\boldsymbol{\gamma}\right), \quad (31)$$

$$\tilde{\theta}_{i,j}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right)=\theta_{i,j}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right)-\Delta\theta_{i,j}\left(\left\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}\right\}_{k=1,k\neq j}^{\tilde{m}},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right), \quad (32)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^{*(j)}(t)=\tilde{\tilde{\mathbf{q}}}^{*(j)}\left(\left\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}\left(\boldsymbol{\alpha}_0^{(k)},t\right)\right\}_{k=1,k\neq j}^{\tilde{m}},\mathbf{q}^{*(j)}\right),\ j=1,\tilde{m},\ i=1,N_{\mathbf{x}}, \quad (33)$$

где функции $\theta_{i,j}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right)$, $\Delta\theta_{i,j}\left(\left\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}\right\}_{k=1,k\neq j}^{\tilde{m}},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right)$, $\varphi_{i,j}(\theta,\boldsymbol{\gamma})$, $i=1,N_{\mathbf{x}}$, $\tilde{\tilde{\mathbf{q}}}^{*(j)}\left(\left\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}\right\}_{k=1,k\neq j}^{\tilde{m}},\mathbf{q}^{*(j)}\right)$, $j=1,\tilde{m}$ имеют пределы

$$\exists \lim_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)}\to\boldsymbol{\alpha}^{*(j)}} \theta_{i,j}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(j)},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right)=\hat{\theta}_{i,j}\left(\boldsymbol{\alpha}^{*(j)},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right),\ j=\overline{1,\tilde{m}},\ i=\overline{1,N_{\mathbf{x}}}, \tag{34}$$

$$\exists \lim_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\to\boldsymbol{\alpha}^*} \theta_{i,j}\left(\left\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}\right\}_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\tilde{m}},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right)=\hat{\theta}_{i,j}\left(\left\{\boldsymbol{\alpha}^{*(k)}\right\}_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{\tilde{m}},\mathbf{w}^*,\mathbf{q}^{*(j)},\boldsymbol{\gamma}\right),\ j=\overline{1,\tilde{m}},\ i=\overline{1,N_{\mathbf{x}}}, \tag{35}$$

$$\exists \lim_{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\to\boldsymbol{\alpha}^*} \tilde{\tilde{\mathbf{q}}}^{*(j)}\left(\left\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)}\right\}_{k=1,k\neq j}^{\tilde{m}},\mathbf{q}^{*(j)}\right)=\hat{\tilde{\mathbf{q}}}^{*(j)}\left(\left\{\boldsymbol{\alpha}^{*(k)}\right\}_{k=1,k\neq j}^{\tilde{m}},\mathbf{q}^{*(j)}\right),\ j=\overline{1,\tilde{m}}, \tag{36}$$

$$\exists \lim_{\theta\to\hat{\theta}} \varphi_{i,j}\left(\theta,\gamma\right)=\hat{\varphi}_{i,j}\left(\hat{\theta},\gamma\right)\neq\infty,\ j=\overline{1,\tilde{m}},\ i=\overline{1,N_{\mathbf{x}}}, \tag{37}$$

постоянные параметры $\boldsymbol{\gamma}$, $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(0,j)}$, $j=\overline{1,\tilde{m}}$, $i=\overline{1,N_{\mathbf{x}}}$ определяются из уравнения (25); кусочно-постоянные параметры $\mathbf{q}^{*(j)}=\mathbf{q}^{*(j)}\left(\tilde{\boldsymbol{\alpha}},\mathbf{v}^*,\mathbf{s}^*,\mathbf{P}^*,\mathbf{U}^*\right)$, $j=\overline{1,\tilde{m}}$ характеризуют локальную область постоянства параметров $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{U}^*$. Отсюда в силу (34)–(37) аналитическое решение $\mathbf{x}^{(0,j)}(t)$, $j=\overline{1,\tilde{m}}$, даваемое (31)–(33), при фиксированных $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{q}^{*(j)}$, $j=\overline{1,\tilde{m}}$ асимптотически устойчиво. Значит, в силу приведенных выше рассуждений существует такая система (25), общим решением которой является аналитическое выражение (31)–(33). Более того, аналитическое выражение (31)–(33), как нетрудно видеть, вбирает в себя особенности динамики, обусловленные перекрестными эффектами.

Стягивая области постоянства параметров $\mathbf{w}^*$, $\mathbf{v}^*$, $\mathbf{s}^*$, $\mathbf{P}^*$, $\mathbf{U}^*$ и соответственно $\mathbf{q}^*$, $\mathbf{q}^{*(j)}$, $j=\overline{1,\tilde{m}}$ в точки, исходя из (10), (17), исходя из (31) – (33) (или из (26), (27), эквивалентных (31) – (33)) имеем [13]:

$$\overline{\mathbf{x}}^{(0)}(t)=\mathbf{h}\left(\mathbf{x}^{(0)}(t),\mathbf{a}\right)+\Delta\mathbf{h}\left(\mathbf{q}^*,\mathbf{a}\right),\ \mathbf{x}^{(0)}(t)=\left\{\mathbf{x}^{(0,k)}(t)\right\}_{k=1}^{\tilde{m}}, \tag{38}$$

где постоянные параметры $\mathbf{a}$ и $\boldsymbol{\gamma}$, $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(0,j)}$, $j=\overline{1,\tilde{m}}$, $i=\overline{1,N_{\mathbf{x}}}$ определяются из (1)–(3) путем приравнивания к нулю в дискретные моменты времени t_l, $l=\overline{1,N_t}$ имеющих смысл флуктуаций невязок $\mathbf{o}^{(0)}(t)$, определяемых из (1) и (2) [13]:

$$\mathbf{o}^{(0)}(t)=\frac{d\overline{\mathbf{x}}^{(0)}(t)}{dt}-\mathrm{B}\left(\overline{\mathbf{x}}^{(0)}(t),\mathrm{U}(t),\mathbf{p}\right)\frac{\delta\Delta\mathbf{x}^{(0)}(t)}{dt}+\left(\frac{d\overline{\mathbf{x}}(t)}{dt}\right)_{ext},\ \mathbf{o}^{(0)}(t_l)=0,\ l=\overline{1,N_t}, \tag{39}$$

$$\frac{\delta\Delta\mathbf{x}^{(0)}(t)}{dt}=\Delta\mathrm{A}\left(\overline{\mathbf{x}}^{(0)}(t),\mathrm{U}(t),\mathbf{p}\right)\Delta\mathrm{X}\left(\overline{\mathbf{x}}^{(0)}(t),\mathrm{U}(t),\mathbf{p}\right), \tag{40}$$

где N_t – число дискретных моментов времени. Постоянные параметры $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(0,j)}$, $j=\overline{1,\tilde{m}}$, $i=\overline{1,N_{\mathbf{x}}}$, а также постоянные величины в (6), (7), (9) определяются из экспериментальных данных $\mathbf{r}^{(Э)}(t)$, используя соотношения (3), (5)–(7), (9), (31)–(33), (38)–(41), а также соотношения, вытекающие из (4) [13]:

$$\Delta\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}^{(Э)}(t)-\mathbf{g}_{\mathbf{r}}\left(\overline{\mathbf{x}}^{(0)}(t),\mathrm{U}(t),\mathbf{p}\right),\ \Delta\mathbf{r}(t_l)=0,\ l=\overline{1,N_t}, \tag{41}$$

где $\Delta\mathbf{r}(t)$ – погрешность модели. Определив упомянутые выше параметры, определим контролируемые характеристики системы, используя (4) [13]:

$$\mathbf{z}(t)=\mathbf{g}_{\mathbf{z}}\left(\overline{\mathbf{x}}^{(0)}(t),\mathrm{U}(t),\mathbf{p}\right). \tag{42}$$

Соотношения (3), (5)–(7), (9), (31)–(33), (38)–(42) дают возможность, оценив чувствительность невязок к постоянным величинам $\tilde{\mathbf{B}}_i$, $i=\overline{1,N_{\mathbf{B}}}$, $\Delta\tilde{\mathbf{A}}_i$, $i=\overline{1,N_{\mathbf{A}}}$, $\tilde{F}_i$, $i=\overline{1,N_F}$, упрощать модель вышеописанным способом путем замены базиса функциональных разложений (6), (7), (9).

Более того, имея из экспериментальных данных лишь некоторые области изменения наблюдаемых параметров, мы из уравнений (3), (5)–(7), (9), (31)–(33), (38)–(41) оцениваем диапазоны изменения постоянных параметров (в том числе и диссипативной матрицы), входящих в уравнения (6), (7), (9), а значит, можем оценить область в фазовом пространстве, в котором находится динамика решения [12].

Результаты

Аналитическое задание приближения решения уравнений метода математического прототипирования, вбирающее в себя особенности протекания физических и химических процессов в конкретной системе, дает возможность задать класс адекватных моделей требуемой точности. Такой класс задается в виде соотношений (3), (5)–(7), (9), (31)–(33), (38)–(42). В предложенном классе моделей систем различной физической и химической природы модель строится с наименьшими вычислительными затратами.

Обсуждение

Предложенный в настоящей работе класс моделей систем различной физической и химической природы может быть положен в основу архитектур нейронных сетей для диагностики и прогнозирования технического состояния, для проектирования компонентов авиационного оборудования. Такие модели могут быть как непрерывными, так и дискретными, как детерминированными, так и стохастическими.

Заключение

Задание аналитического приближения решения дает возможность строить модели систем различной физической и химической природы, которые могут быть положены в основу математического ядра систем автоматизированного проектирования компонентов авиационного оборудования, а также систем диагностики и прогнозирования технического состояния компонентов авиационного оборудования.

Список литературы

1. Юревич Е. И. Основы проектирования техники. СПб. : Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2012. 135 с.
2. Барзилович Е. Ю. Модели технического обслуживания сложных систем. М. : Высшая школа, 1982. 231 с.
3. Колодежный Л. П., Чернодаров А. В. Надежность и техническая диагностика. М. : Изд-во ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, 2010. 452 с.
4. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. СПб. : Профессия, 2003. 768 с.
5. Khalyutin S. P., Starostin I. E., Agafonkina I. V. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development // Energies. 2023. № 16. doi:10.3390/en16041933
6. Starostin I. E., Bykov V. I. Kinetic theorem of modern non-equilibrim thermodynamics. Raley, Noth Caroline, USA : Open Science Publishing, 2017. 229 p.
7. Старостин И. Е., Степанкин А. Г. Программная реализация методов современной неравновесной термодинамики и система симуляции физико-химических процессов SimulationNonEqProcSS v.0.1.0. Бо Бассен, Маврикий : Lambert academic publishing, 2019. 127 с.
8. Эткин В. А. Энергодинамика (синтез теорий переноса и преобразования энергии). СПб. : Наука, 2008. 409 с.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
10. Дзядзык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функции полиномами. М. : Наука, 1977. 512 с.
11. Быков В. И., Старостин И. Е., Халютин С. П. Анализ формирования диссипативных структур в сложных сосредоточенных системах на основе потенциально-потокового метода. Кибернетический подход // Сложные системы. 2012. № 4. С. 72–89.
12. Быков В. И., Старостин И. Е., Халютин С. П. Качественный анализ динамики процессов в неравновесных системах на основе потенциально-потокового метода методом обратной связи // Информатика и системы управления. 2013. № 3. С. 75–89.
13. Старостин И. Е. Аналитическое задание решений потенциально-потоковых уравнений и идентификация параметров системы // Фундаментальные, поисковые, прикладные исследования и инновационные проекты : сб. тр. Нац. науч.-практ. конф. М., 2022. С. 377–382.
14. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М. : МЦНМО, 2012. 144 с.
15. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. : Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 211 с.

References

1. Yurevich E.I. *Osnovy proektirovaniya tekhniki = Fundamentals of engineering design*. Saint Petersburg: Sankt-Peterburgskiy gosudarstvennyy politekhnicheskiy universitet, 2012:135. (In Russ.)
2. Barzilovich E.Yu. *Modeli tekhnicheskogo obsluzhivaniya slozhnykh system = Models of maintenance of complex systems*. Moscow: Vysshaya shkola, 1982:231. (In Russ.)
3. Kolodezhnyy L.P., Chernodarov A.V. *Nadezhnost' i tekhnicheskaya diagnostika = Reliability and technical diagnostics*. Moscow: Izd-vo VVA im. prof. N.E. Zhukovskogo i Yu.A. Gagarina, 2010:452. (In Russ.)
4. Bessekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya = Theory of automatic control systems*. Saint Petersburg: Professiya, 2003:768. (In Russ.)
5. Khalyutin S.P., Starostin I.E., Agafonkina I.V. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development. *Energies*. 2023;(16). doi:10.3390/en16041933
6. Starostin I.E., Bykov V.I. *Kinetic theorem of modern non-equilibrim thermodynamics*. Raley, Noth Caroline, USA: Open Science Publishing, 2017:229.
7. Starostin I.E., Stepankin A.G. *Programmnaya realizatsiya metodov sovremennoy neravnovesnoy termodinamiki i sistema simulyatsii fiziko-khimicheskikh protsessov SimulationNonEqProcSS v.0.1.0 = Software implementation of methods of modern nonequilibrium thermodynamics and simulation system of physico-chemical processes SimulationNonEqProcSS v.0.1.0*. Bo Bassen, Mavrikiy: Lambert academic publishing, 2019:127. (In Russ.)
8. Etkin V.A. *Energodinamika (sintez teoriy perenosa i preobrazovaniya energii) = Energodynamics (synthesis of theories of energy transfer and transformation).* Saint Petersburg: Nauka, 2008:409. (In Russ.)
9. Kalitkin N.N. *Chislennye metody = Numerical methods*. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011:592. (In Russ.)
10. Dzyadzyk V.K. *Vvedenie v teoriyu ravnomernogo priblizheniya funktsii polinomami = Introduction to the theory of uniform approximation of a function by polynomials*. Moscow: Nauka, 1977:512. (In Russ.)
11. Bykov V.I., Starostin I.E., Khalyutin S.P. Analysis of the formation of dissipative structures in complex concentrated systems based on the potentially streaming method. Cybernetic approach. *Slozhnye sistemy = Complex systems*. 2012;(4):72–89. (In Russ.)
12. Bykov V.I., Starostin I.E., Khalyutin S.P. Qualitative analysis of the dynamics of processes in nonequilibrium systems based on the potential-flow method by the feedback method. *Informatika i sistemy upravleniya = Informatics and control systems*. 2013;(3):75–89. (In Russ.)
13. Starostin I.E. Analytical assignment of solutions of potentially-flow equations and identification of system parameters. *Fundamental'nye, poiskovye, prikladnye issledovaniya i innovatsionnye proekty: sb. tr. Nats. nauch.-prakt. konf. = Fundamental, search, applied research and innovative projects : proceedings of the National scientific and practical conference*. Moscow, 2022:377–382. (In Russ.)
14. Arnol'd V.I. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya = Ordinary differential equations*. Moscow: MTsNMO, 2012:144. (In Russ.)
15. Krasovskiy N.N. *Nekotorye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya = Some problems of the theory of stability of motion*. Moscow: Gos. izd-vo fiz.-mat. lit., 1959:211. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Игорь Евгеньевич Старостин
доктор технических наук, доцент,
профессор кафедры электротехники
и авиационного электрооборудования,
Московский государственный технический
университет гражданской авиации
(Россия, г. Москва, Кронштадтский бульвар, 20)
E-mail: starostinigo@yandex.ru

Igor E. Starostin
Doctor of technical sciences, associate professor,
professor of the sub-department of electrical
engineering and aviation electrical equipment,
Moscow State Technical University of Civil Aviation
(20 Kronstadtsky boulevard, Moscow, Russia)

Алексей Алексеевич Дружинин
студент,
Московский государственный технический
университет гражданской авиации
(Россия, г. Москва, Кронштадтский бульвар, 20)
E-mail: alexs20017@mail.ru

Aleksey A. Druzhinin
Student,
Moscow State Technical University of Civil Aviation
(20 Kronstadtsky boulevard, Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 27.02.2023
Поступила после рецензирования/Revised 30.03.2023
Принята к публикации/Accepted 04.05.2023