

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ

А. И. Годунов¹, С. А. Куканов², П. С. Суздальцев³, А. М. Мухамбетов⁴

¹ Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

^{2,3} Филиал Военной академии материально-технического обеспечения
имени генерала армии А. В. Хрулева в г. Пензе, Пенза, Россия

⁴ Военный институт воздушной обороны, Актобе, Казахстан

¹ avitelpgu@mail.ru, ² Kuk_@mail.ru, ³ suzdal.1990@bk.ru, ⁴ suimbayeva@internet.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается управление беспилотным летательным аппаратом-квадрокоптером. *Материалы и методы.* Исследован квадрокоптер заданного класса как объект управления, проведен анализ и математическое описание системы управления квадрокоптером. Представлена математическая модель, которая описывает движение и поведение квадрокоптера в пространстве, обеспечивающая движение в воздухе и управление стабилизацией аппарата при заданных углах положения путем подачи управляющих сигналов на двигатели. *Результаты.* Законы управления определяют динамику движения беспилотного летательного аппарата при управлении, а также характеризуют структуру построения системы управления. Системы управления достаточно сложны, поэтому исследование их динамических свойств связано с серьезными трудностями. Как следствие, многоконтурная система управления была разделена на несколько более простых. *Выводы.* Метод представления многоконтурной системы управления в виде нескольких простых систем позволяет анализировать и оценивать работу системы управления квадрокоптером, а также имитировать его полетные характеристики для достижения максимально точного воспроизведения реального полета.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, квадрокоптер, система управления, модель, математическая модель

Для цитирования: Годунов А. И., Куканов С. А., Суздальцев П. С., Мухамбетов А. М. Математическая модель системы управления квадрокоптером // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 2. С. 25–31. doi: 10.21685/2307-4205-2024-2-3

MATHEMATICAL MODEL OF THE SYSTEM CONTROL OF THE QUADCOPTER

A.I. Godunov¹, S.A. Kukanov², P.S. Suzdaltsev³, A.M. Mukhambetov⁴

¹ Penza State University, Penza, Russia

^{2,3} Branch of the Military Academy of Logistics named after Army General A.V. Khrulev in Penza, Penza, Russia

⁴ Military Institute of Air Defense, Aktobe, Kazakhstan

¹ avitelpgu@mail.ru, ² Kuk_@mail.ru, ³ suzdal.1990@bk.ru, ⁴ suimbayeva@internet.ru

Abstract. *Background.* This article discusses the control of an unmanned aerial vehicle—a quadcopter. *Materials and methods.* A quadcopter of a given class is studied as an object of control, an analysis and mathematical description of the quadcopter control system is carried out, a mathematical model is presented that describes the movement and behavior of the quadcopter in space, providing movement in the air and control of the stabilization of the device at specified position angles by applying control signals to the engines. *Results.* The control laws determine the dynamics of the UAV movement during control, as well as characterize the structure of the control system. Control systems are quite complex, therefore, the study of their dynamic properties is associated with serious difficulties. As a result, the multi-circuit control system was divided into several simpler ones. *Conclusions.* The method of representing a multi-circuit control system in the form of several simple systems allows you to analyze and evaluate the operation of the quadcopter control system, as well as simulate its flight characteristics to achieve the most accurate reproduction of a real flight.

Keywords: unmanned aerial vehicle, quadcopter, control system, model, mathematical model

For citation: Godunov A.I., Kukanov S.A., Suzdaltsev P.S., Mukhambetov A.M. Mathematical model of the system control of the quadcopter. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2024;(2):25–31. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-2-3

Введение

Квадрокоптер – это динамичное летающее средство с пониженным приводом и с четырьмя входными усилиями, имеющее шесть степеней свободы. В отличие от обычных вертолетов, которые имеют несущие винты с переменным углом наклона, квадрокоптер имеет четыре несущих винта с фиксированным шагом и фиксированным углом наклона. Движением квадрокоптера в шести степенях свободы (*6DOF*) управляют, изменяя обороты четырех несущих винтов по отдельности, тем самым изменяя подъемную силу и вращательные усилия. Квадрокоптер наклоняется в направлении медленно вращающегося двигателя, что позволяет ему крениться и наклоняться по наклонной плоскости. Углы крена и тангажа разделяют тягу на два направления, благодаря чему достигается линейное движение [1]. Несущие винты вращаются парами по часовой стрелке и против (рис. 1), чтобы контролировать рыскание (угол курса), возникающее из-за силы сопротивления несущих винтов. Центр тяжести находится почти в одной плоскости, в которой расположены все двигатели. Кроме того, все четыре двигателя одного класса по эффективности. Это отличает его от вертолетов, но его становится очень трудно стабилизировать с помощью ручного управления. Поэтому для сбалансированного полета квадрокоптера необходимо сложное управление [2].

Разработка модели системы управления

Моделирование состояния системы беспилотного летательного аппарата является важным инструментом для разработки и совершенствования квадрокоптера, которое позволяет провести анализ его поведения и учесть такие факторы, как динамика полета с различными степенями свободы, аэродинамические характеристики и другие параметры, влияющие на полет. Получение достоверной информации способствует их совершенствованию, улучшению и расширению возможностей, а также позволяет оптимизировать управление, улучшить стабильность и автономность полета, а также оценить производительность системы [3].

Пространственное движение квадрокоптера описывается системой уравнений, в которую входят уравнения поступательного движения центра тяжести, вращательного движения относительно центра тяжести и уравнения связи (рис. 1):

$$\left\{ \begin{array}{l} m \left(\frac{dV_x}{dt} + V_z \omega_y - V_y \omega_z \right) = \sum F_{x1}; \\ m \left(\frac{dV_y}{dt} + V_x \omega_z - V_z \omega_x \right) = \sum F_{y1}; \\ m \left(\frac{dV_z}{dt} + V_y \omega_x - V_x \omega_y \right) = \sum F_{z1}; \\ I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = \sum M_x; \\ I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_{z1} \omega_{x1} = \sum M_{y1}; \\ I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_{y1} - I_{x1}) \omega_{x1} \omega_{y1} = \sum M_{z1}; \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_{z1} \cos \gamma - \omega_{y1} \sin \gamma; \\ \frac{d\gamma}{dt} = \omega_{x1} - \sin \vartheta \frac{d\psi}{dt}; \\ \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_{y1} \cos \gamma - \omega_{z1} \sin \gamma). \end{array} \right. \quad (1)$$

Следовательно, уравнение (1) показывает динамику квадрокоптера по шести степеням свободы. После того, как динамические уравнения установлены, можно перейти к моделированию пространства состояний летательного аппарата. Из-за простоты и легкости понимания четырехместный ротор сначала моделируется в режиме *3D*, а затем – в режиме *6DOF*.

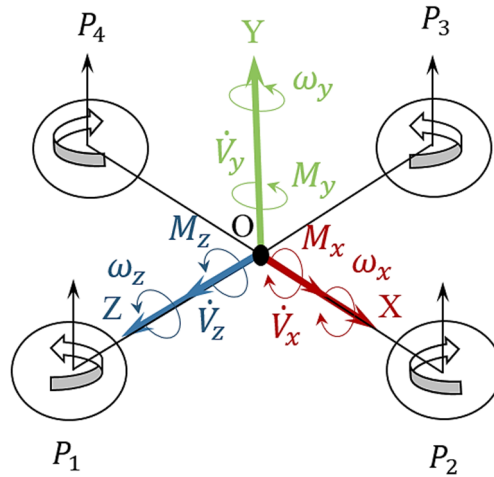


Рис. 1. Динамика квадрокоптера

Представление пространства состояний – это математическая модель физической системы в виде набора входных, выходных переменных и переменных состояния, связанных дифференциальными уравнениями первого порядка. «Пространство состояний» относится к пространству, осями которого являются переменные состояния. Состояние системы может быть представлено в виде вектора в пределах этого пространства. Наиболее общее представление линейной системы в пространстве состояний с p входами, q выходами и n переменными состояния записывается в следующем виде:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (3)$$

где $x(t)$ – вектор состояния; $y(t)$ – выходной вектор; $u(t)$ – вектор управления; A – системная матрица; B – входная матрица; C – выходная матрица; D – матрица прямой связи [4].

Управление движением вдоль вертикальной оси OY в земной системе координат реализуется непосредственно путем заданной величины суммарной тяги двигателей. Перемещение БЛА вдоль осей OX и OZ при условии стабилизации значения угла рыскания, близком к нулю, обеспечивается за счет изменений заданных значений углов тангажа и крена соответственно [3]. Структура системы управления траекторным и угловым движением приведена на рис. 2.

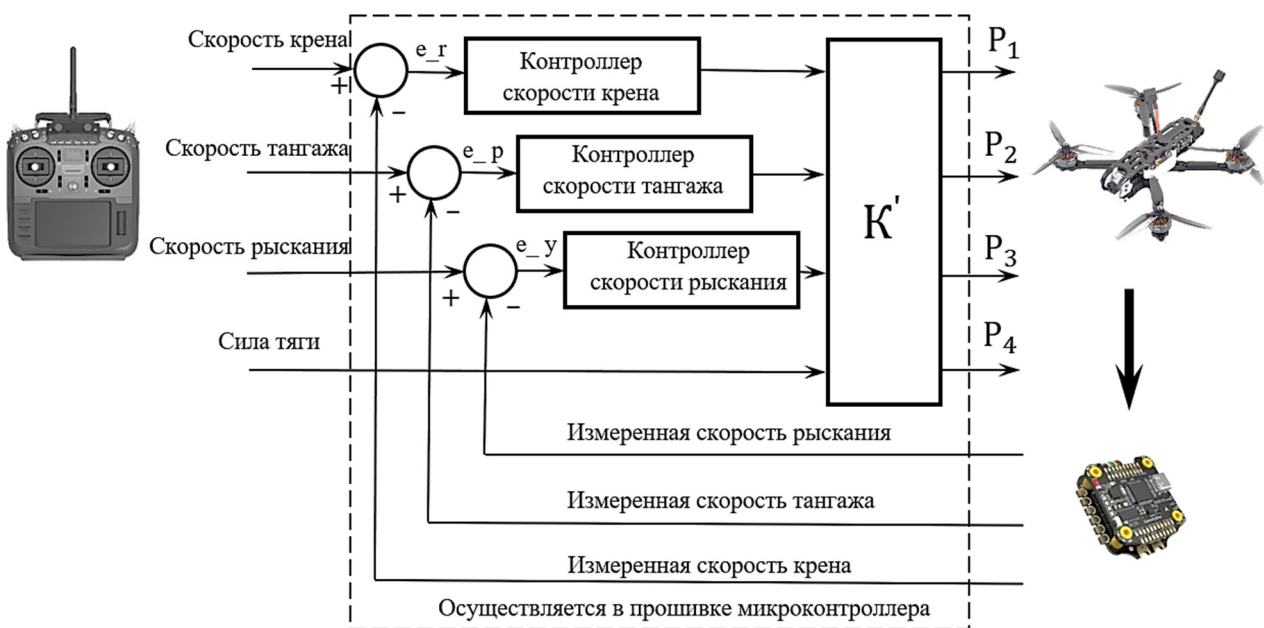


Рис. 2. Схема управления квадрокоптером

Управление угловым движением в зависимости от заданных и измеренных значений углов и угловых скоростей производится формированием требуемых значений моментов крена, тангажа и рыскания. Полученные значения моментов и суммарной тяги двигателей передаются в блок формирования требуемых отклонений органов управления, которые используются в качестве входных управляющих воздействий для блока расчета динамики полета БЛА. Сигналы текущих значений параметров линейного и углового движения БЛА, полученные с помощью системы бортовых измерений, поступают в контур управления траекторным и угловым движением БЛА [5].

Формирование контура управления высотой выполним на основании линеаризованного уравнения вертикального движения БЛА:

$$\sum F_y = mg \left(\frac{dV_y}{dt} + V_x \omega_z - V_z \omega_x \right).$$

Если считать отклонения углов крена и тангажа небольшими, то

$$\sum F_y = F_p - mg,$$

где $F_p = P_1 + P_2 + P_3 + P_4$ – сумма тяг, создаваемая винтомоторной группой, m – масса БЛА, h – высота, F_p – тяга двигателей, g – ускорение свободного падения, K_p – коэффициент пропорциональности для ошибки по высоте, K_v – коэффициент пропорциональности ошибки по скорости.

Линейный стабилизатор $K_p(h_{\text{тек}} - h_{\text{зад}}) - K_v(h_{\text{тек}} - h_{\text{зад}})dt$ предназначен для компенсации ошибок по высоте и скорости и поддержания летательного аппарата на желаемой высоте [5].

Из линеаризованного уравнения следует, что управление высотой выбранного БЛА непосредственно реализуется синхронным изменением тяг всех двигателей. На вход контура поступает заданное значение высоты $h_{\text{зад}}$, а на выходе формируется требуемое значение суммарной тяги всех двигателей F_p :

$$F_p = K_p(h_{\text{тек}} - h_{\text{зад}}) - K_v(h_{\text{тек}} - h_{\text{зад}})dt.$$

Сформированное в контуре управления значение требуемого угла тангажа поступает на вход внутреннего контура – контура стабилизации угла тангажа (рис. 3).

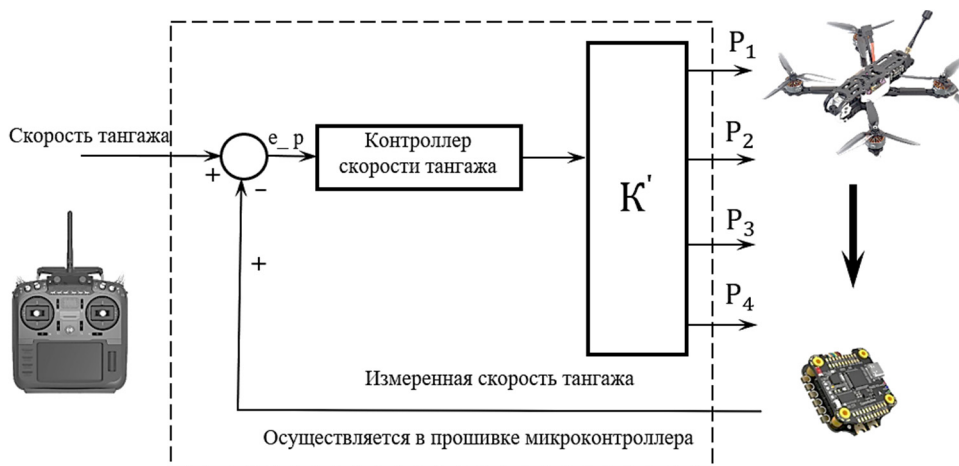


Рис. 3. Схема управления углом тангажа

Уравнения углового движения относительно поперечной оси OZ можно записать в виде

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x)\omega_x \omega_y = \sum M_z.$$

При этом на выходе контура будет формироваться соответствующее заданное значение вращающего момента вокруг оси OZ связанной системы координат, которое впоследствии будет подано на вход блока динамики БЛА, при котором уравнение будет иметь вид

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum M_z - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y - K_p (\vartheta_{\text{тек}} - \vartheta_{\text{зад}}) - K_V (\dot{\vartheta}_{\text{тек}} - \dot{\vartheta}_{\text{зад}}) dt,$$

где K_p , K_V – коэффициенты регулирования угла тангажа.

Сформированное в контуре управления координатой OX значение потребного угла крена поступает на вход внутреннего контура – контура стабилизации угла крена (рис. 4).



Рис. 4. Схема управления углом крена

Уравнения углового движения относительно поперечной оси OY :

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = \sum M_x.$$

С помощью уравнений движения определим закон управления углом крена и сформируем необходимые обратные связи:

$$I_x \frac{d\omega_x}{dt} = \sum M_x - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z - K_p (\gamma_{\text{тек}} - \gamma_{\text{зад}}) - K_V (\dot{\gamma}_{\text{тек}} - \dot{\gamma}_{\text{зад}}) dt,$$

где K_p , K_V – коэффициенты регулирования угла крена.

Линеаризованные уравнения углового движения относительно оси OY имеют вид

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = \sum M_y.$$

На вход контура управления углом рыскания поступает заданное значение угла рыскания (рис. 5).

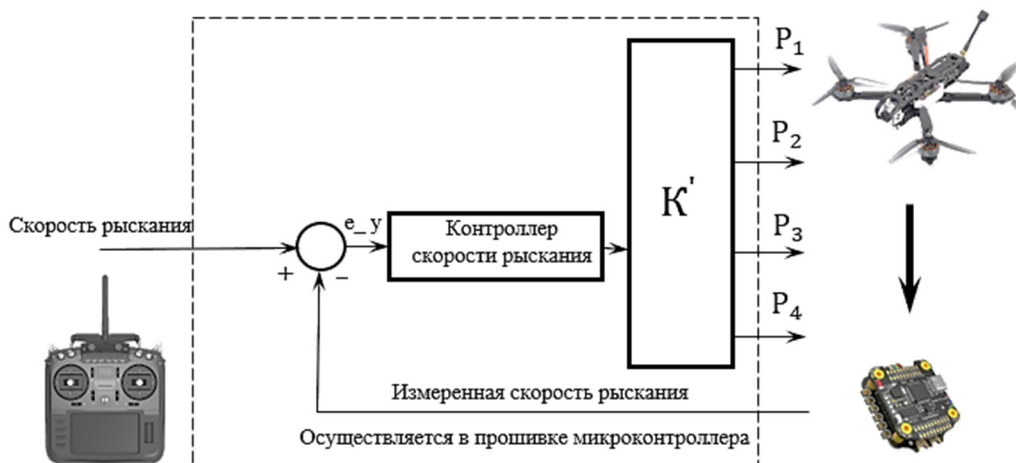


Рис. 5. Схема управления углом рыскания

На выходе регулятора формируется при этом потребный момент рыскания:

$$I_y \frac{d\omega_y}{dt} = \sum M_y - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x - K_p (\Psi_{\text{тек}} - \Psi_{\text{зад}}) - K_V (\Psi_{\text{тек}} - \Psi_{\text{зад}}) dt,$$

где K_p , K_V – коэффициенты регулирования угла рыскания.

Заключение

Законы управления определяют динамику движения БЛА при ручном и автоматическом управлении, а с другой стороны, характеризуют структуру построения системы управления. Системы автоматического управления современных БЛА достаточно сложны, поэтому исследование их динамических свойств в общем случае связано с серьезными трудностями. Как следствие, многоконтурную систему управления динамических свойств существенно упростили и представили в виде несколько более простых. Обоснованием такого разделения являются собственные динамические свойства БЛА, где движение можно разделить на продольное и боковое и рассматривать управление ими независимо друг от друга. Поскольку малые (короткопериодические) движения, определяющие движение вокруг центра масс, протекают значительно быстрее больших (длиннопериодических) движений, характеризующих движение центра масс, то системы управления, в свою очередь, можно разделить на системы управления движением вокруг центра масс и движением центра масс. Управление осуществляется путем воздействия на органы управления и создания необходимых управляющих сил и моментов [5–7].

Список литературы

1. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета: траектории летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 505 с.
2. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1973. 615 с.
3. Алхаддад Мухаммад. Моделирование и управление ориентацией квадрокоптера с использованием линейного квадратического регулятора // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. 2016. Т. 1, № 12. С. 883–886.
4. Красовский Н. Н., Летов А. М. К теории аналитического конструирования регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1962. № 6. С. 713–720.
5. Горбатенко С. А., Макашов Э. М., Полушкин Ю. Ф. [и др.]. Механика полета. Общие сведения. Уравнения движения. М.: Машиностроение, 1969. 419 с.
6. Китаев В. Н., Афанасьев Р. Л., Петров М. В. Математическая модель инерционного включателя // Надежность и качество сложных систем. 2022. № 1. С. 30–40.
7. Дивеев А. И., Конырбаев Н. Б. Эволюционный метод решения задачи группы квадрокоптеров для повышения качества мониторинга области // Надежность и качество сложных систем. 2017. № 4. С. 64–72.

References

1. Ostoslavskiy I.V., Strazheva I.V. *Dinamika poleta: traektorii letatel'nykh apparatov = Flight dynamics: trajectories of aircraft*. Moscow: Mashinostroenie, 1969:505. (In Russ.)
2. Lebedev A.A., Chernobrovkin L.S. *Dinamika poleta bespilotnykh letatel'nykh apparatov = Flight dynamics of unmanned aerial vehicles*. Moscow: Mashinostroenie, 1973:615. (In Russ.)
3. Alkhaddad Mukhammad. Modeling and control of the orientation of a quadcopter using a linear quadratic controller. *Aktual'nye problemy aviatsii i kosmonavtiki = Actual problems of aviation and cosmonautics*. 2016;1(12):883–886. (In Russ.)
4. Krasovskiy N.N., Letov A.M. To the theory of analytical design of regulators. *Avtomatika i telemekhanika = Automation and telemechanics*. 1962;(6):713–720. (In Russ.)
5. Gorbatenko S.A., Makashov E.M., Polushkin Yu.F. et al. *Mekhanika poleta. Obshchie svedeniya. Uravneniya dvizheniya = Mechanics of flight. General information. Equations of motion*. Moscow: Mashinostroenie, 1969:419. (In Russ.)
6. Kitaev V.N., Afanas'ev R.L., Petrov M.V. Mathematical model of an inertial switch. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2022;(1):30–40. (In Russ.)
7. Diveev A.I., Konyrbaev N.B. An evolutionary method for solving the problem of a group of quadcopters to improve the quality of monitoring of the region. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2017;(4):64–72. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Анатолий Иванович Годунов

доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
профессор кафедры автоматизации и телемеханики,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: avitelpgu@mail.ru

Сергей Анатольевич Куканов

кандидат технических наук,
доцент кафедры средств ближнего боя,
Филиал Военной академии
материально-технического
обеспечения имени генерала армии
А. В. Хрулева в г. Пензе
(Россия, г. Пенза, Военный городок)
E-mail: Kuk_@mail.ru

Павел Сергеевич Суздальцев

адъюнкт,
Филиал Военной академии
материально-технического
обеспечения имени генерала армии
А. В. Хрулева в г. Пензе
(Россия, г. Пенза, Военный городок)
E-mail: suzdal.1990@bk.ru

Асылбек Маратович Мухамбетов

старший офицер отдела связи
и радиотехнического обеспечения,
Военный институт сил воздушной обороны
(Казахстан, г. Актобе, ул. Алии Молдагуловой, 39А)
E-mail: suimbayeva@internet.ru

Anatoly I. Godunov

Doctor of technical sciences, professor,
honored worker of Russia,
professor of the sub-department of automation
and telemechanics,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Sergei A. Kukanov

Candidate of technical sciences, associate professor
of the sub-department of melee weapons,
Branch of the Military Academy
of Logistics named after Army General
A.V. Khrulev in Penza
(Military town, Penza, Russia)

Pavel S. Suzdaltsev

Adjunct,
Branch of the Military Academy
of Logistics named after Army General
A.V. Khrulev in Penza
(Military town, Penza, Russia)

Asylbek M. Mukhambetov

Senior officer of the department of communications
and radio engineering support,
Military Institute of Air Defense
(39A Aliya Moldagulova street, Aktobe)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.**

Поступила в редакцию/Received 20.02.2024

Поступила после рецензирования/Revised 03.03.2024

Принята к публикации/Accepted 25.03.2024