

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ УЗЛОВ

А. И. Годунов¹, С. А. Куканов², Д. В. Бакланов³

¹ Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

^{2,3} Филиал Военной академии материально-технического обеспечения имени генерала армии А. В. Хрулева в г. Пензе, Пенза, Россия

¹ avitelpgu@mail.ru, ² Kuk_@mail.ru, ³ baklanov90@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Изучены деформации и разрушение материала композитной гильзы в области контакта двух различных материалов (стали и полиамида) с помощью математической модели разрывного метода Галеркина. Особенностью исследования является то, что данный метод сохраняет массовые и кинетические характеристики в узлах модели, разрушение происходит при достижении предела текучести. Также для адекватного описания разрушения для каждого материала задано уравнение состояния вещества по Ми – Грюнейзену. *Материалы и методы.* Рассмотрен порядок проведения моделирования с целью оптимизации и выбора оптимальных технических решений с помощью программных комплексов моделирования разрушения на основе метода конечных узлов и сопоставления полученных результатов с математическими расчетами на основе математической модели разрывного метода Галеркина. *Результаты и выводы.* По итогу исследования решена задача расчета на прочность разработанной композитной гильзы не только по всей ее длине, но и на стыке двух различных материалов с учетом перерезывающего усилия в области их адгезивного соединения.

Ключевые слова: разрывной метод Галеркина, функция формы EFG, локальное граничное интегрирование, эрозия

Для цитирования: Годунов А. И., Куканов С. А., Бакланов Д. В. Физические особенности процессов деформации и разрушения материала методом конечных узлов // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 3. С. 19–29. doi: 10.21685/2307-4205-2024-3-3

PHYSICAL FEATURES OF THE PROCESSES OF DEFORMATION AND DESTRUCTION OF THE MATERIAL BY THE FINITE NODE METHOD

A.I. Godunov¹, S.A. Kukanov², D.V. Baklanov³

¹ Penza State University, Penza, Russia

^{2,3} Branch of the Military Academy of Logistics named after Army General A.V. Khrulev in Penza, Penza, Russia

¹ avitelpgu@mail.ru, ² Kuk_@mail.ru, ³ baklanov90@yandex.ru

Abstract. *Background.* In this article, deformations and destruction of the composite sleeve material in the contact area of two different materials (steel and polyamide) are studied using a mathematical model of the Galerkin discontinuous method. The peculiarity of the study is that this method preserves the mass and kinetic characteristics in the nodes of the model, destruction occurs when the yield point is reached. Also, for an adequate description of the destruction, the Mi-Grüneisen equation of state of matter is given for each material. *Materials and methods.* The procedure of modeling is considered in order to optimize and select optimal technical solutions using software systems for modeling fracture based on the finite node method and comparing the results obtained with mathematical calculations based on the mathematical model of the discontinuous Galerkin method. *Results and conclusions.* As a result of the study, the problem of calculating the strength of the developed composite sleeve was solved not only along its entire length, but also at the junction of two different materials, taking into account the shearing force in the area of their adhesive connection.

Keywords: discontinuous Galerkin method, EFG shape function, local boundary integration, erosion

For citation: Godunov A.I., Kukanov S.A., Baklanov D.V. Physical features of the processes of deformation and destruction of the material by the finite node method. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems*. 2024;(3):19–29. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-3-3

Расчет на прочность композитной гильзы (рис. 1) проводился в квазистатическом приближении для момента времени, при котором реализуется максимальное давление пороховых газов $P = 295$ МПа. Допустимость квазистатического расчета обосновывается достаточно большими временами протекающих процессов (максимальные деформации развиваются в изделии за время $\sim 74 \cdot 10^{-5}$ с) по сравнению со временем распространения возмущений в материале изделия (прохождение упругих волн по длине стандартной конструкции занимает время, порядка единиц микросекунд). Кроме этого, предполагается возможность использования свойств полиамидного материала, полученных в статических испытаниях. Это предположение сделано как для металлов, так и для композитов, для которых при реализующихся скоростях деформаций свойства (предел текучести/прочности, модули упругости) меняются незначительно.

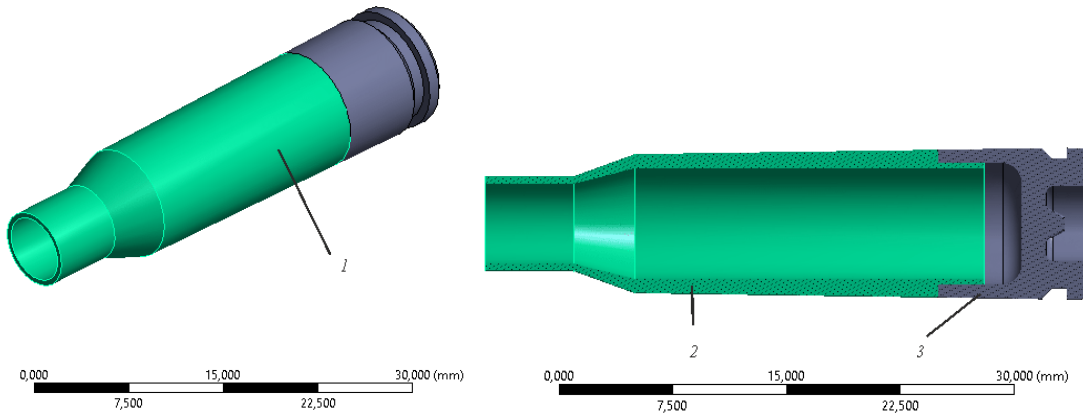


Рис. 1. Композитная гильза:
1 – общий вид гильзы; 2 – тело гильзы из полиамида PA612; 3 – донная часть из стали

Таким образом, материал должен работать в упругой зоне. При проектировании композитного тела гильзы, изготовленного из полиамида, критериями являются пределы прочности материала, а при рассмотрении металлической донной части критерием является предел текучести. Соединение конечных элементов и узлов представлено на рис. 2.

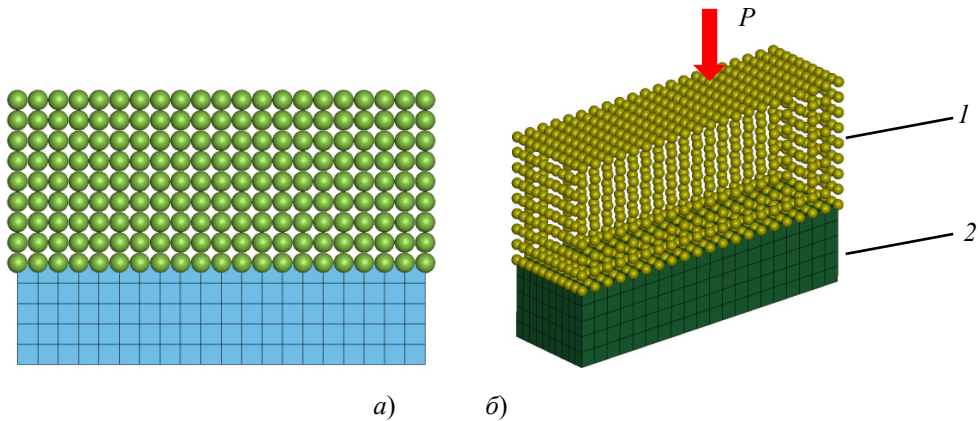


Рис. 2. Соединение конечных элементов и узлов:
а – вид оболочки; б – вид объема: 1 – тело гильзы из полиамида;
2 – донная часть гильзы из стали; P – давление пороховых газов 295 МПа

Разрывной метод Галеркина [2] сочетает в себе свойства конечно-объемных и конечно-элементных методов, при этом под сеточной функцией понимается функция, на каждом интервале (x_j, x_{j+1}) которой имеется многочлен порядка $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. На каждом интервале можно выбрать любой базис в пространстве многочленов порядка p и продолжить эти функции нулем вне интервала. Объединение таких функций образует базис в пространстве сеточных функций [1].

Решение нахождения параметров разрушения материала тела композитной гильзы при таком подходе можно описать в виде линейных комбинаций базисных функций с зависящими от времени коэффициентами:

$$\vartheta(t, x) = \sum_{k=0}^{N_x-1} \sum_{m=0}^p \vartheta_{k,m}(t) \phi_k^m(x). \quad (1)$$

Проинтегрируем уравнение (1) по x . Поскольку базисная функция равна нулю вне одного отрезка, получим

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j^m(x) \frac{du}{dt}(t, x) dx + \mu \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j^m(x) \frac{du}{dt}(t, x) dx = 0. \quad (2)$$

Проинтегрируем второе слагаемое (2) по частям:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j^m(x) u(t, x) dx + \mu \phi_j^m(x_{j+1}) u(t, x_{j+1}) - \mu \phi_j^m(x_j) u(t, x_j) - \mu \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\phi_j^m(x)}{dx} u(t, x) dx = 0. \quad (3)$$

Обратим внимание, что при давлении $P = 0$ каждая из базисных функций является нулевой константой внутри своей ячейки и после деления на эту константу выражение (3) примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(t, x) dx + \mu u(t, x_{j+1}) - \mu u(t, x_j) = 0. \quad (4)$$

Далее приступим к замене $\mu u(t, x_{j+1})$ на некоторые функции, называемые численными потоками. После преобразования (3) уравнение примет вид

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} \phi_j^m(x) \frac{d\upsilon}{dt}(t, x) dx + \phi_j^m(x_{j+1}) F_{j+1}(t) - \phi_j^m(x_j) F_j(t) - \mu \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{d\phi_j^m(x)}{dx} \upsilon(t, x) dx = 0, \quad (5)$$

где

$$F_j(t) = \vartheta(t, x_j - 0) \frac{1 + \sigma \text{sign} \mu}{2} + \vartheta(t, x_j + 0) \frac{1 - \sigma \text{sign} \mu}{2}, \quad (6)$$

а $0 \leq \sigma \leq 1$. Символами $\vartheta(t, x_j \pm 0)$ обозначены предельные значения слева и справа от точки x_j . Часто полагают $\sigma \equiv 1$, но оставим возможность варьирования этого параметра [3].

Уравнение для описания поля деформации и перемещений:

$$\bar{U}^h(x, t) = \sum_{K=1}^{NP} W_K(x) U^h(x_K, t) \equiv \sum_{K=1}^{NP} \phi_K(x) d_K(t). \quad (7)$$

Связи частиц до момента разрушения представлены на рис. 3, их можно описать как

$$\begin{aligned} \bar{U}^h(x_1, t) = & \phi_1(x_1) d_1(t) + \phi_2(x_1) d_2(t) + \phi_4(x_1) d_4(t) + \phi_5(x_1) d_5(t) + \\ & + \phi_6(x_1) d_6(t) + \phi_7(x_1) d_7(t) + \phi_8(x_1) d_8(t) + \phi_{10}(x_1) d_{10}(t). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\bar{U}^h(x_2, t) = \phi_1(x_2) d_2(t) + \phi_2(x_2) d_2(t) + \phi_3(x_2) d_3(t) + \phi_8(x_2) d_8(t) + \phi_9(x_2) d_9(t) + \phi_{10}(x_2) d_{10}(t). \quad (9)$$

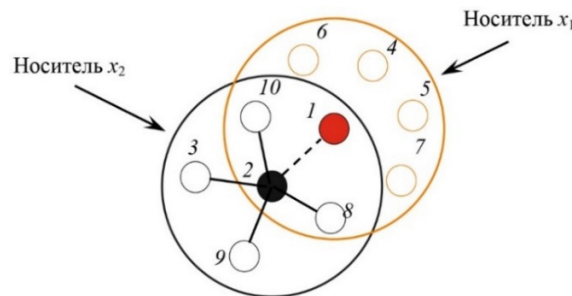


Рис. 3. Схема взаимодействия двух частиц с носителями связей:

1 – частица с математическим носителем $\phi_1(x_2) d_2(t)$;

2 – частица с математическим носителем $\phi_2(x_1) d_2(t)$

При выполнении условия $\phi_1(x_2)d_2(t)=0$ и $\phi_2(x_1)d_2(t)=0$ происходит разрушение связей и, соответственно, разрушение материала. В описанном методе разрушение по пластической деформации связей позволяет описать аппроксимацию ядром сглаживания, при котором приближенное представление функций и их производных осуществляется через ядро сглаживания и ее производные [4]. При этом методе нет потери энергии и массы материала (в отличие от метода конечных элементов), который подвергается разрушению. Высокие порядки аппроксимации способны лучше описывать высокие градиенты.

Для описания сглаживания (рис. 4) используется кубическая В-сплайновая функция ядра в качестве весовой функции:

$$W_a(x-x_1) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{3} - 4\left(\frac{\|x-x_1\|}{a}\right)^2 + 4\left(\frac{\|x-x_1\|}{a}\right)^3 \quad 0 \leq \frac{\|x-x_1\|}{a} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\left(\frac{\|x-x_1\|}{a}\right) + 4\left(\frac{\|x-x_1\|}{a}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{\|x-x_1\|}{a}\right)^3 \quad \frac{1}{2} < \frac{\|x-x_1\|}{a} \leq 1 \end{array} \right. \quad (10)$$

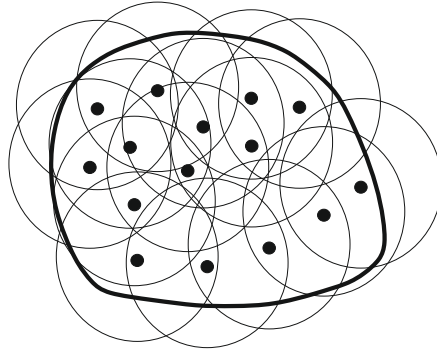


Рис. 4. Графическое представление без сеточной дискретизации

Метод скользящего наименьшего квадрата заключается в минимизации взвешенной L_2 -нормы:

$$J = \sum_{i=1}^{NP} W_a(x-x_1) \left[\sum_{i=1}^n H_i(x) b_i(x) - u(x_1) \right]^2, \quad (11)$$

где NP – число узлов в поддержке X , для которых $W_a(x-x_1) \neq 0$.

В неявном виде безсеточный метод использует комбинацию гладких базисных функций (примитивов) для нахождения скалярной функции, такой, что все узлы данных близки к изоконтуре этой скалярной функции в глобальном смысле [1]. В реальности построение поверхности оболочки с помощью трехмерного безсеточного метода оказывается неадекватным. Это связано с тем, что топология реальной поверхности может быть очень сложной в трех измерениях. Без информации об упорядоченности или связности узлов реконструированная поверхность не сможет отобразить пересечения оболочек, внешних границ и углов формы.

Уравнение (11) можно записать в виде

$$J = (Hb - u)^T W_a(x) (Hb - u), \quad (12)$$

где

$$U^T = (u_1, u_2, \dots, u_{NP}), \quad (13)$$

$$H = \begin{bmatrix} \{H(x_1)\}^T \\ \dots \\ \{H(x_{NP})\}^T \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\{H(x_1)\}^T = \{H_1(x_1), \dots, W_a(x - x_{NP})\}, \quad (15)$$

$$W_a = \text{diag}[w_a(x - x_1), \dots, w_a(x - x_{NP})]. \quad (16)$$

Чтобы найти коэффициент b , получим экстремум J по формуле

$$\frac{dJ}{db} = M^{[n]}(x)b(x) - B(x)u = 0, \quad (17)$$

где $M^{[n]}(x)$ называется матрицей моментов $w_a(x - x_1)$ и имеет вид

$$M^{[n]}(x) = H^T W_a(x) H. \quad (18)$$

Итак, у нас есть

$$B(x) = M^{[n]}(x) B(x) u. \quad (19)$$

Чтобы $M^{[n]}(x)$ была инвертируемой, поддержка $w_a(x - x_1)$ должна быть больше минимального размера, который связан с порядком базисных функций. Используя решение уравнений (6), (17), аппроксимация получается следующим образом:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{NP} \Psi_i(x) u_i, \quad (20)$$

где функции формы $\Psi_i(x)$ задаются следующим образом:

$$\Psi_i(x) = H^T(x) M^{[n]}(x) B(x) \quad (21)$$

и $\Psi_i(x)$ являются полными n -го порядка, т.е.

$$\sum_{i=1}^{NP} \Psi_i(x) x_{11}^p x_{21}^q = x_1^p x_2^q \text{ для } p + q = 0, \dots, n. \quad (22)$$

Сходимость метода Галеркина для дифференциального уравнения определяется аппроксимацией неизвестных и численным интегрированием в слабой форме. Функции формы Element Free Galerkin Method (далее EFG) с линейной согласованностью могут быть получены из линейной аппроксимации поля перемещения с линейными базисными функциями. Использование линейно согласованных бессеточных функций формы в аппроксимации Галеркина не гарантирует линейной точности решения [2]. Для линейной точности решения в приближении Галеркина необходимы два ограничения на интегрирование:

$$\sum_{L=1}^{NIT} \nabla \Psi_i(x_L) A_L \text{ для } \{I : \text{supp}(\Psi_i) \cap G = 0\}, \quad (23)$$

$$\sum_{L=1}^{NIT} \nabla \Psi_i(x_L) A_L = \sum_{L=1}^{NITh} n \Psi_i(\tilde{x}_L) S_L \text{ для } \{I : \text{supp}(\Psi_i) \cap G^h \neq 0\}, \quad (24)$$

где G^h – естественная граница; G – общая граница; n – нормаль к поверхности G^h ; x_L и A_L – пространственная координата и вес точки интегрирования области соответственно; \tilde{x}_L и S_L – пространственная координата и вес точки интегрирования естественной границы, NIT – количество точек интегрирования для доменного интегрирования; $NITh$ – количество точек интегрирования для интегрирования естественной границы.

Метод сглаживания деформаций в качестве регуляризации неустойчивости материала при локализации деформаций был расширен в методе узлового интегрирования для удовлетворения ограничений на интегрирование. Используя аналогичную концепцию для доменного интегрирования со сглаживанием деформации в представительной области точки Гаусса, получим

$$\tilde{\nabla} u_i^h(x_L) = \frac{1}{A_L} \int_{\Omega_L} \nabla u_i^h(x_L) d\Omega, \quad A_L = \int_{\Omega_L} d\Omega, \quad (25)$$

где Ω_L – представительный домен в каждой точке Гуасса, а $\tilde{\nabla}$ – сглаженный градиент:

$$\tilde{\nabla} u_i^h(x_L) = \frac{1}{A_L} \int_{G_L} n u_i^h(x_L) dG, \quad (26)$$

где G_L – граница представительной области точки Гуасса L :

$$\tilde{\nabla} u_i^h(x_L) = \sum_i \frac{1}{A_L} \int_{G_L} \Psi_i(x) n dG \cdot d_{ii} \equiv \sum_i \tilde{\nabla} \Psi_i(x_L) d_{ii}. \quad (27)$$

Можно сказать, что сглаженный градиент функции формы EFG· удовлетворяет целочисленным ограничениям в уравнениях (23) и (24) независимо от используемого численного интегрирования.

Разработаны два проекционных метода для создания средней поверхности оболочки с использованием приближения скользящих наименьших квадратов. Для обработки произвольно больших вращений с умеренными деформационными реакциями оболочечных структур используется метод вращения с обновленным лагранжианом [6]. Метод локального граничного интегрирования в сочетании с селективным методом сокращенного интегрирования вводится для обеспечения линейной точности и снятия блокировки сдвига. Это позволяет описать физический процесс разрушения материала композитной гильзы.

Восстановление поверхности по неорганизованным узлам является очень сложной задачей в трех измерениях. При разработке бессеточных оболочек предполагается, что поверхность оболочки описывается сеткой конечных элементов. Этого можно легко добиться, преобразовав часть конечных элементов оболочки в зону без сетки (рис. 5). Благодаря связности узлов, обеспечиваемой сеткой конечных элементов, поверхность оболочки может быть восстановлена с помощью бессеточной интерполяции из узловых положений.

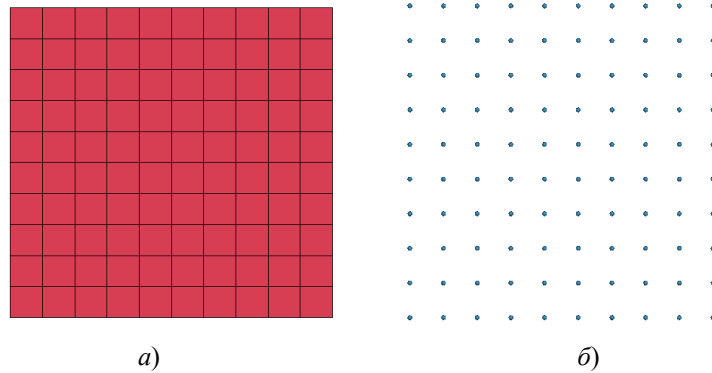


Рис. 5. Преобразование конечных элементов элементарной оболочки:
 а – массив конечных элементов; б – массив конечных узлов

Немаловажную роль в математическом моделировании соединенных конечных элементов и конечных узлов (рис. 6) необходимо отвести их совместному вращению в пространстве. Геометрия и кинематические поля оболочки могут быть описаны с помощью опорной поверхности в направлении движения. Модифицированное предположение Мидлина – Рейсснера требует, чтобы движение и смещение оболочки было линейным в направлении волокон материала [5]. Предположим, что опорной поверхностью является средняя поверхность оболочки, глобальные координаты и смещения в произвольной точке внутри тела оболочки можно задать как

$$x = \bar{x} + \xi \frac{h}{2} V_3; \quad (28)$$

$$u = \bar{u} + \xi \frac{h}{2} U, \quad (29)$$

где x и u – вектор положения и смещение опорной поверхности; V_3 – направление волокна материала; U – смещение, возникающее в результате вращения материала; h – длина волокна.

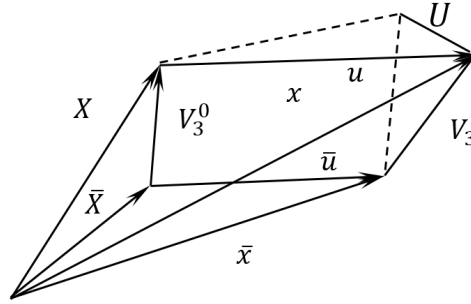


Рис. 6. Векторное представление деформации оболочки

В приближении без сетки движение и деформация задаются как

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \bar{x}(\xi, \eta) + V(\xi, \eta, \zeta) \approx \sum_{i=1}^{NP} \tilde{\Psi}_1(\xi, \eta) x_i + \sum_{i=1}^{NP} \tilde{\Psi}_1(\xi, \eta) \frac{\zeta h_i}{2} V_{3i}, \quad (30)$$

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \bar{u}(\xi, \eta) + U(\xi, \eta, \zeta) \approx \sum_{i=1}^{NP} \tilde{\Psi}_1(\xi, \eta) u_i + \sum_{i=1}^{NP} \tilde{\Psi}_1(\xi, \eta) \frac{\zeta h_i}{2} [-V_{2i} V_{1i}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}, \quad (31)$$

где x и u – глобальные координаты и смещения в свободной от сетки узлов области i ; V_{3i} – единичный вектор направления волокна; V_{1i} и V_{2i} – базовые векторы узловой системы координат в узле i ; α_i и β_i – повороты вектора направления V_{3i} вокруг осей V_{2i} и V_{1i} , а $\tilde{\Psi}_1$ – двумерные функции формы.

Локальная система координат совместного вращения $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ определяется в каждой точке интегрирования на опорной поверхности оболочки с касательными \hat{x} и \hat{y} [3]. На основании вышеизложенного базис векторов примет вид

$$\hat{e}_1 = \frac{x_{,\xi}}{\|x_{,\xi}\|}, \hat{e}_3 = \frac{x_{,\xi} \times x_{,\eta}}{\|x_{,\xi} \times x_{,\eta}\|}, \hat{e}_2 = \hat{e}_3 \times \hat{e}_1. \quad (32)$$

Чтобы описать повороты волокон узла без сетки в оболочке, введем узловую систему координат (рис. 7), тремя базовыми векторами которой являются V_1, V_2, V_3 , где направление волокна в узле V_1, V_2 определено как

$$V_1 = \frac{\hat{x} \times V_3}{|\hat{x} \times V_3|}, V_2 = V_3 \times V_1. \quad (33)$$

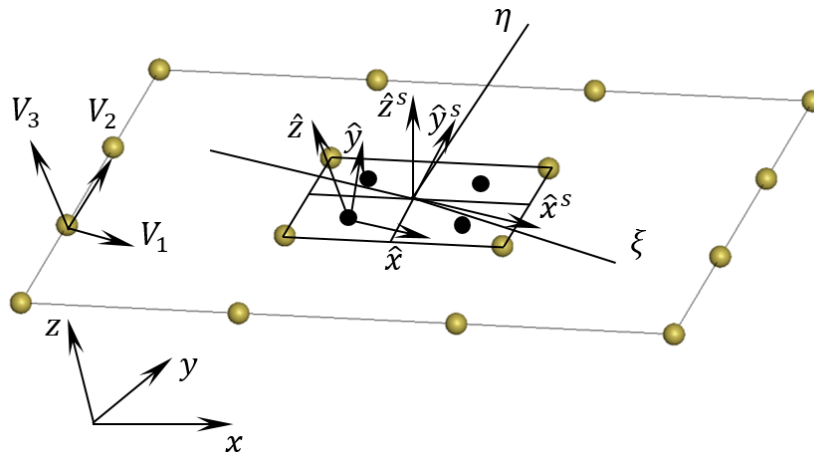


Рис. 7. Локальная и узловая системы координат с одновременным вращением

Затем вращение направляющего материала описываем из глобальных вращений:

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} \Delta \Theta, \quad \Delta \Theta = [\Delta \Theta_1 \Delta \Theta_2 \Delta \Theta_3]^T. \quad (34)$$

В локальной системе координат с одновременным вращением движения и смещение аппроксимируются функциями формы без сетки вида

$$\hat{x}_i = \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_I \hat{x}_{iI} + \zeta \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{3iI}, \quad (35)$$

$$\hat{u}_i = \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_I \hat{u}_{iI} + \zeta \sum_{I=1}^{NP} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} [-\hat{V}_{2iI} \hat{V}_{1iI}] \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}. \quad (36)$$

Лагранжевая деформация сглаживается как

$$\tilde{\varepsilon}^m = \sum_I \tilde{B}_I^m \hat{d}_I, \quad \tilde{\varepsilon}^b = \zeta \sum_I \tilde{B}_I^b \hat{d}_I, \quad \tilde{\varepsilon}^s = \sum_I \tilde{B}_I^s \hat{d}_I, \quad (37)$$

где сглаженные операторы деформации вычисляются путем усреднения согласованных операторов деформации по области вокруг оцениваемой точки:

$$\tilde{B}_I^m(x_I) = \frac{1}{A_I} \int_{\Omega_I} \tilde{B}_I^m dA, \quad \tilde{B}_I^b(x_I) = \frac{1}{A_I} \int_{\Omega_I} \tilde{B}_I^b dA, \quad \tilde{B}_I^s(x_I) = \frac{1}{A_I} \int_{\Omega_I} \tilde{B}_I^s dA, \quad (38)$$

$$\tilde{B}_I^m = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_{I,x} & 0 & 0 & -J_{13}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2xI} & -J_{13}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1xI} \\ 0 & \tilde{\Psi}_{I,y} & 0 & -J_{23}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2yI} & -J_{23}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1yI} \\ \tilde{\Psi}_{I,x} & \tilde{\Psi}_{I,y} & 0 & -J_{23}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2xI} - J_{13}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2yI} & -J_{23}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1xI} + J_{13}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1yI} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_I^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\tilde{\Psi}_{I,x} \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2xI} & \tilde{\Psi}_{I,x} \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1xI} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{\Psi}_{I,y} \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2yI} & \tilde{\Psi}_{I,y} \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1yI} \\ 0 & 0 & 0 & -\tilde{\Psi}_{I,y} \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2xI} - \tilde{\Psi}_{I,x} \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2yI} & \tilde{\Psi}_{I,y} \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1xI} + \tilde{\Psi}_{I,x} \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1yI} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}_I^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{\Psi}_{I,y} & -J_{33}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2yI} - J_{23}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2zI} & J_{33}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1yI} + J_{23}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1zI} \\ 0 & 0 & \tilde{\Psi}_{I,x} & -J_{33}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2xI} - J_{13}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{2zI} & J_{33}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1xI} + J_{13}^{-1} \tilde{\Psi}_I \frac{h_I}{2} \hat{V}_{1zI} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где J^{-1} является обратной матрицей Якоби в точке интегрирования. Локальная степень свободы выражается как

$$\hat{d}_I = [\hat{u}_{xI} \quad \hat{u}_{yI} \quad \hat{u}_{zI} \quad \alpha_I \quad \beta_I]^T. \quad (39)$$

Внутренний узловый вектор силы равен

$$\hat{F}_I^{\text{int}} = \int_{\Omega} \tilde{B}_I^{mT} \hat{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \zeta \tilde{B}_I^{bT} \hat{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \tilde{B}_I^{sT} \hat{\sigma} d\Omega. \quad (40)$$

Использование обновленной формулировки Лагранжа подразумевает, что система координат отсчета определяется системой совместного вращения в конфигурации в момент времени t [7]. Следовательно, локальные узловые векторы силы и перемещения, относящиеся к этой системе координат, должны быть преобразованы в глобальную систему координат при построении. Математическая модель процесса разрушения и деформации материала 5,45-мм композитной гильзы представлена на рис. 8.

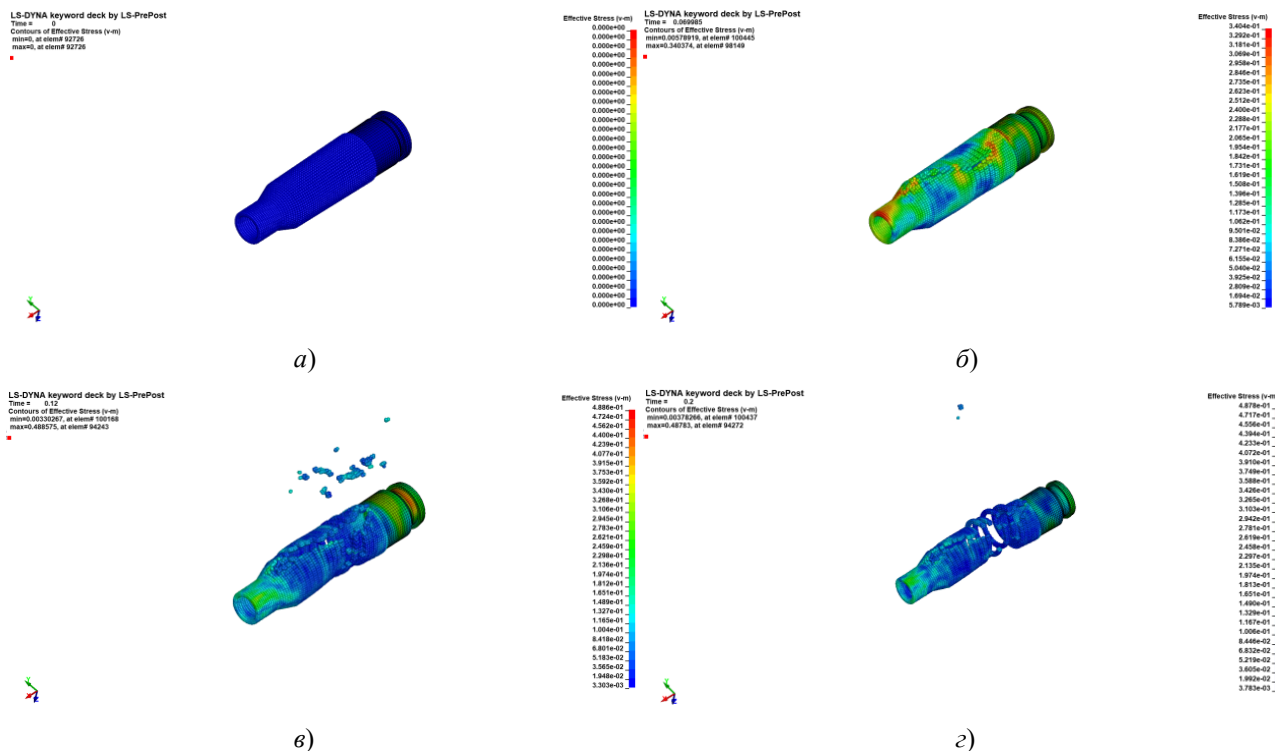


Рис. 8. Математическая модель процесса разрушения и деформации материала:

a – концентрация силового воздействия на материал; *б* – распределение стресса по фон Мизесу в материале; *в* – физическое образование потери связи массива узлов разрушаемого материала; *г* – разрушение материала

Заключение

Таким образом, был определен наиболее рациональный математический метод, который решался в лагранжевой постановке задач при использовании явной схемы интегрирования разрывным методом конечных узлов Галеркина. Также решение задачи динамического нагружения композитной гильзы методом конечных узлов позволит исключить такое понятие, как «эрозия» элемента, сохранить массу и энергию на всем цикле интегрирования. Высокие порядки аппроксимации позволили лучше описать высокие градиенты, однако стоит отметить как недостаток большую вычислительную сложность. Кроме того, был выбран восьмиузловой конечный элемент, позволяющий с достаточной точностью описать геометрические размеры элементов системы.

Список литературы

1. Каплун А. Б., Морозов Е. М., Олферьева М. А. ANSYS в руках инженера : практ. руководство. М. : Ленанд/URSS, 2017. 272 с.
2. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений. М. : Изд.-во АН СССР, 1952. Т. 1. 391 с.
3. Johnson G. R., Cook W. H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures // Eng Fract Mech. 1985. Vol. 21, № 1. P. 31–48.
4. Плитов И. С., Полилов А. Н., Татусь Н. А. Компьютерное моделирование рациональной структуры криволинейного армирования профилированных композитных элементов // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2013. № 4. С. 73–79.
5. Chang F. K., Chang K. Y. A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations // J Compos Mater. 1987. Vol. 21, № 9. P. 834–855.

6. Wang Y. X., Long R. R., Zhang Q. M. [et al.]. Numerical simulation of deformation characteristics of two-layer metal-plastic cylindrical shells during internal explosive immersion // *Acta Armamentarii*. 2020. Vol. 41, № S2. С. 189–199.
7. Моссаковский П. А., Костырева Л. А. О новом способе экспериментального исследования материалов на динамический сдвиг при высокоскоростном деформировании // *Проблемы прочности и пластичности*. 2018. Т. 80, № 1. С. 127–135.
8. Седов Л. И. *Механика сплошной среды*. М. : Наука, 1970. Т. 2. 492 с.

References

1. Kaplun A.B., Morozov E.M., Olfer'eva M.A. *ANSYS v rukakh inzhenera: prakt. rukovodstvo = ANSYS in the hands of an engineer : a practical guide*. Moscow: Lenand/ URSS, 2017:272. (In Russ.)
2. Galerkin B.G. *Sobranie sochineniy = Collected works*. Moscow: Izd.-vo AN SSSR, 1952;1:391. (In Russ.)
3. Johnson G.R., Cook W.H. Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures. *Eng Fract Mech*. 1985;21(1):31–48.
4. Plitov I.S., Polilov A.N., Tatus' N.A. Computer modeling of the rational structure of curved reinforcement of profiled composite elements. *Problemy mashinostroeniya i avtomatizatsii = Problems of mechanical engineering and automation*. 2013;(4):73–79. (In Russ.)
5. Chang F.K., Chang K.Y. A progressive damage model for laminated composites containing stress concentrations. *J Compos Mater*. 1987;21(9):834–855.
6. Wang Y.X., Long R.R., Zhang Q.M. et al. Numerical simulation of deformation characteristics of two-layer metal-plastic cylindrical shells during internal explosive immersion. *Acta Armamentarii*. 2020;41(S2):189–199.
7. Mossakovskiy P.A., Kostyreva L.A. On a new method of experimental investigation of materials for dynamic shear during high-speed deformation. *Problemy prochnosti i plastichnosti = Problems of strength and plasticity*. 2018;80(1):127–135. (In Russ.)
8. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy = Mechanics of a continuous medium*. Moscow: Nauka, 1970;2:492. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Анатолий Иванович Годунов

доктор технических наук, профессор,
заслуженный деятель науки РФ,
профессор кафедры автоматизации и телемеханики,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: avitelpgu@mail.ru

Сергей Анатольевич Куканов

кандидат технических наук,
доцент кафедры средств ближнего боя,
Филиал Военной академии
материально-технического
обеспечения имени генерала армии
А. В. Хрулева в г. Пензе
(Россия, г. Пенза, Военный городок)
E-mail: Kuk_@mail.ru

Дмитрий Владимирович Бакланов

адъюнкт,
Филиал Военной академии
материально-технического
обеспечения имени генерала армии
А. В. Хрулева в г. Пензе
(Россия, г. Пенза, Военный городок)
E-mail: baklanov90@yandex.ru

Anatoly I. Godunov

Doctor of technical sciences, professor,
honored scientist of the Russian Federation,
professor of the sub-department
of automation and telemechanics,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Sergei A. Kukanov

Candidate of technical sciences, associate professor
of the sub-department of melee weapons,
Branch of the Military Academy
of Logistics named after Army General
A.V. Khrulev in Penza
(Military town, Penza, Russia)

Dmitry V. Baklanov

Adjunct,
Branch of the Military Academy
of Logistics named after Army General
A.V. Khrulev in Penza
(Military town, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /

The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 08.06.2024

Поступила после рецензирования/Revised 20.07.2024

Принята к публикации/Accepted 25.08.2024