УДК 62.192
doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-4

ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ РЕСУРСА НЕВОССТАНАВЛИВАЕМЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Г. С. Садыхов[1], С. С. Кудрявцева[2], В. М. Дубровин[3]

[1, 2, 3] Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана, Москва, Россия
[1] gsadykhov@gmail.com, [2] kudryavctva@bmstu.ru, [3] dubrovinvm1934@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели*. При выборе математической модели надежности невосстанавливаемых технических объектов заранее надо знать условия, при которых средний ресурс конечен и когда бесконечен. Поэтому актуальная задача – найти признаки сходимости и расходимости интегралов ресурса. *Материалы и методы*. В настоящей работе, оценивая средний ресурс через функцию интенсивности отказов невосстанавливаемых технических объектов, найдены достаточные условия сходимости и расходимости интегралов ресурса. *Результаты*. На основе найденных признаков сходимости и расходимости интегралов ресурса невосстанавливаемых технических объектов определены условия ограниченности и неограниченности значений среднего ресурса. *Выводы*. Доказаны достаточные условия сходимости и расходимости интегралов ресурса невосстанавливаемых технических объектов. Приведены примеры использования полученных результатов.

Ключевые слова: средний ресурс, вероятность безотказной работы, интеграл ресурса

Для цитирования: Садыхов Г. С., Кудрявцева С. С., Дубровин В. М. Признаки сходимости и расходимости интегралов ресурса невосстанавливаемых технических объектов // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 1. С. 31–38. doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-4

SIGNS OF CONVERGENCE AND DIVERGENCE OF INTEGRALS OF THE OPERATING LIFE OF NON-RESTORABLE ITEMS

G.S. Sadykhov[1], S.S. Kudryavtseva[2], V.M. Dubrovin[3]

[1, 2, 3] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
[1] gsadykhov@gmail.com, [2] kudryavctva@bmstu.ru, [3] dubrovinvm1934@yandex.ru

Abstract. *Background*. When choosing a mathematical model of reliability of non-recoverable items, it is necessary to know in advance the conditions under which the mean operating life is finite and when it is infinite. Therefore, the actual problem is to find signs of convergence and divergence of operating life integrals. *Materials and methods*. In this paper, estimating the mean operating life through a function of the failure rate of non-recoverable items, sufficient conditions for convergence and divergence of operating life integrals are found. *Results*. On the basis of the found signs of convergence and divergence of integrals of the operating life of non-recoverable items, the conditions of limitation and unlimited values of the mean operating life are determined. *Conclusions*. Sufficient conditions for convergence and divergence of integrals of the operating life of non-recoverable items are proved. Examples of the use of the obtained results are given.

Keywords: mean operating life, conditional probabilities, operating life integrals

For citation: Sadykhov G.S., Kudryavtseva S.S., Dubrovin V.M. Signs of convergence and divergence of integrals of the operating life of non-restorable items. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2024;(1):31–38. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-4

Введение

Пусть ζ – наработка до отказа невосстанавливаемого объекта. Под средним ресурсом объекта будем понимать величину

$$r = E(\zeta),$$

где $E(\zeta)$ – математическое ожидание величины ζ [1].

Доказана следующая формула расчета среднего ресурса объекта [2–4]:

$$r = \int_0^{\infty} P(t)\,dt, \tag{1}$$

где правая часть – интеграл ресурса; $P(t)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Интеграл ресурса не всегда сходится. Например, для распределения наработок до отказа по закону Парето [5, 6]:

$$P(t) = \frac{\beta}{\beta + t},$$

где $\beta > 0$ – постоянная, интеграл ресурса расходится, следовательно, средний ресурс у такого объекта бесконечен, т.е. $r = \infty$.

Тогда возникает задача: найти условия, при которых интеграл ресурса сходится, и условия, при которых он расходится.

Решению этой задачи и посвящается настоящая работа.

Под интенсивностью отказа объекта в момент времени t понимается следующее соотношение [7, 8]:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P_r\left[(t < \zeta < t + \Delta t)/\zeta > t\right]}{\Delta t},$$

где $P_r[\cdot]$ – вероятность события $(t < \zeta < t + \Delta t)$ при условии $\zeta > t$.

Доказано, что справедлива следующая формула [9–11]:

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)\,du\right]. \tag{2}$$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть функция интенсивности отказов невосстанавливаемого объекта удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t) = \Lambda, \tag{3}$$

где $0 < \Lambda < \infty$. Тогда интеграл ресурса невосстанавливаемого объекта сходится.

Доказательство. Из определения предела и условия (3) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $T = T(\varepsilon)$, что при

$$t > T \tag{4}$$

выполняется соотношение

$$\Lambda - \varepsilon < \lambda(t) < \Lambda + \varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon < \Lambda$ и воспользуемся далее левой оценкой двойного неравенства

$$\lambda(t) > \lambda - \varepsilon \tag{5}$$

в формуле (2). Тогда при условии (4) имеем

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^T \lambda(u)\,du\right] \cdot \exp\left[-\int_T^t \lambda(u)\,du\right] = A(T)\exp\left[-\int_T^t \lambda(u)\,du\right], \tag{6}$$

где $A(T) = \exp\left[-\int_0^T \lambda(u)\,du\right]$ – постоянная.

Так как согласно неравенству (5)

$$\exp\left[-\int_T^t \lambda(u)\,du\right] < \exp\left[-\int_T^t (\Lambda-\varepsilon)\,du\right],$$

то

$$\exp\left[-\int_T^t \lambda(u)\,du\right] < \exp\left[-(\Lambda-\varepsilon)(t-T)\right].$$

Учитывая это в уравнении (6), получим

$$P(t) < A(T)\exp\left[-(\Lambda-\varepsilon)(t-T)\right]. \tag{7}$$

Далее, используя формулу (1), имеем

$$\int_0^T P(t)\,dt + \int_T^\infty P(t)\,dt = B(T) + \int_T^\infty P(t)\,dt, \tag{8}$$

где $B(T) = \int_0^T P(t)\,dt$ – постоянная.

Учитывая неравенство (7) в соотношении (8), получим

$$\int_0^\infty P(t)\,dt < B(T) + A(T)\int_T^\infty \exp\left[-(\Lambda-\varepsilon)(t-T)\right]dt. \tag{9}$$

Делая следующую замену переменных в правом интеграле

$$t - T = u,$$

получим

$$\int_T^\infty \exp\left[-(\Lambda-\varepsilon)(t-T)\right]dt = \int_0^\infty \exp\left[-(\Lambda-\varepsilon)u\right]du = \frac{1}{\Lambda-\varepsilon}.$$

Учитывая это в оценке (9), находим

$$\int_0^\infty P(t)\,dt < B(T) + \frac{A(T)}{\Lambda-\varepsilon},$$

что доказывает сходимость интеграла ресурса.

Пример 1. Пусть функция интенсивности отказов объекта равна

$$\lambda(t) = a + \frac{1}{1+t},$$

где $0 < a < \infty$ – постоянная. Так как

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t) = a,$$

то согласно теореме 1 интеграл (1) сходится. Другими словами, интеграл ресурса конечен.

Покажем этот вывод другим способом: так как

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)\,du\right] = \exp\left(-\int_0^t a\,du\right)\exp\left(-\int_0^t \frac{du}{1+u}\right),$$

то

$$P(t) = \frac{e^{-at}}{1+t} < e^{-at}.$$

Следовательно,

$$r = \int_0^\infty P(t)\,dt < \int_0^\infty e^{-at}\,dt = \frac{1}{a},$$

что доказывает сходимость интеграла (1).

Теорема 2. Пусть функция интенсивности отказов невосстанавливаемого объекта удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t) = \infty. \tag{10}$$

Тогда интеграл ресурса невосстанавливаемого объекта сходится.

Доказательство. Из определения предела и условия (10) следует, что для всякого $T > 0$ существует такое $E > 0$, что

$$\lambda(t) > E \tag{11}$$

при

$$t > T. \tag{12}$$

Тогда согласно формулам (2) и (12) имеем

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^T \lambda(u)\,du\right]\exp\left[-\int_T^t \lambda(u)\,du\right].$$

Учитывая оценку (11) во втором интеграле, получим

$$P(t) < A(T)\exp\left[-E(t-T)\right],$$

где $A(T)$ – постоянная.

Следовательно,

$$r = \int_0^T P(t)\,dt + \int_T^\infty P(t)\,dt < B(T) + A(T)\int_T^\infty \exp\left[-E(t-T)\right]dt, \tag{13}$$

где $B(T) = \int_0^T P(t)\,dt$ – постоянная.

Так как

$$\int_T^\infty \exp\left[-E(t-T)\right]dt = \int_0^\infty \exp(-Eu)\,du = \frac{1}{E},$$

то учитывая это в соотношении (13), находим

$$r < B(T) + \frac{A(T)}{E},$$

что доказывает теорему 2.

Пример 2. Пусть функция интенсивности отказов невосстанавливаемого объекта равна

$$\lambda(t) = t.$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t) = \infty,$$

то согласно теореме 2 интеграл ресурса сходится.

Покажем это утверждение другим способом: так как

$$\int_0^t \lambda(u)\,du = \int_0^t u\,du = \frac{t^2}{2},$$

то, пользуясь формулой Лапласа [12]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 0{,}5,$$

находим

$$r = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

что доказывает сходимость интеграла (1).

Теорема 3. Пусть функция интенсивности отказов невосстанавливаемого объекта удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t) = 0. \tag{14}$$

Тогда интеграл ресурса невосстанавливаемого объекта расходится.

Доказательство. Из определения предела и условия (14) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $T = T(\varepsilon)$, что при

$$t > T \tag{15}$$

выполняется соотношение

$$-\varepsilon < \lambda(t) < \varepsilon. \tag{16}$$

Воспользуемся правой частью оценки данного неравенства (16) и условием (15) в формуле (2). Тогда имеем

$$P(t) = \exp\left[-\int_0^T \lambda(u)\,du\right]\exp\left[-\int_T^t \lambda(u)\,du\right] > A(T)\exp\left[-\varepsilon(t-T)\right], \tag{17}$$

где $A(T) = \exp\left[-\int_0^T \lambda(u)\,du\right]$ – постоянная.

Далее, используя формулу (1) и оценку (17), получим

$$r = \int_0^T P(t)\,dt + \int_T^\infty P(t)\,dt > B(T) + A(T)\int_T^\infty \exp\left[-\varepsilon(t-T)\right]dt, \tag{18}$$

где $B(T) = \int_0^T P(t)\,dt$ – постоянная.

Так как при $t - T = u$

$$\int_T^\infty \exp\left[-\varepsilon(t-T)\right]dt = \int_0^\infty \exp\left[-\varepsilon u\right]du = \frac{1}{\varepsilon},$$

то, учитывая это в уравнении (18), находим

$$\int_0^\infty P(t)\,dt > B(T) + \frac{A(T)}{\varepsilon}.$$

Поскольку левая часть не зависит от ε, то, устремив ε к нулю, получим

$$\int_0^{\infty} P(t)\,dt \geq \infty.$$

Откуда следует, что интеграл ресурса расходится, что и доказывает теорему 3.

Пример 3. Пусть вероятность безотказной работы невосстанавливаемого объекта в течение времени t равна

$$P(t) = \frac{1}{1+t}.$$

Тогда, используя формулу расчета функции интенсивности отказов, найдем [13–15]

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} = \frac{1}{1+t}.$$

Так как

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0,$$

то, согласно теореме 3, интеграл ресурса расходится.

Обсуждение. В работе найдены достаточные условия сходимости и расходимости интеграла ресурса невосстанавливаемых технических объектов. Найденные условия определяются на основе асимптотических значений интенсивности отказов. Использование этих условий в практических задачах позволяет найти наиболее адекватную математическую модель надежности при любом законе распределения ресурса невосстанавливаемых объектов [16].

Заключение

В настоящей работе найдены признаки сходимости и расходимости интегралов ресурса невосстанавливаемых технических объектов. Найденные признаки определяются на основе асимптотических значений интенсивности отказов.

Приведены примеры использования найденных признаков.

Список литературы

1. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности и их статистический анализ. М. : URSS, 2013. 584 с.
2. Михайлов В. С., Юрков Н. К. Интегральные оценки в теории надежности. Введение и основные результаты. М. : Техносфера, 2020. 148 с.
3. Садыхов Г. С., Кудрявцева С. С. Расчет и оценка среднего остаточного ресурса невосстанавливаемых объектов в зависимости от заданного уровня безотказности // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2022. № 2. С. 13–22. doi: 10.31857/S0235711922020134
4. Садыхов Г. С., Савченко В. П., Сидняев Н. И. Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники. М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. 382 с.
5. Петушков В. А. К прогнозированию остаточного ресурса конструкций с повреждениями, подвергаемых в эксплуатации ударным воздействиям // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. № 3. С. 91–105. doi: 10.31857/S023571192002011X
6. Северцев Н. А., Юрков Н. К., Нгуен К. Т. Показатель «средний остаточный срок утилизации технических объектов» и его свойства // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. 2019. Т. 1. С. 202.
7. Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables // Journal of the American Statistical Association. 1963. № 58. P. 13–30.
8. Садыхов Г. С., Кузнецов В. И. Методы и модели оценок безопасности сверхназначенных сроков эксплуатации технических объектов. М. : URSS, 2007. 144 с.
9. Артюхов А. А. Оценки средней наработки до отказа при частых срабатываниях // Новые информационные технологии в автоматизированных системах. 2015. № 18. С. 295–297.
10. Димитриенко Ю. И., Юрин Ю. В., Европин С. В. Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления. Часть 1. Численное моделирование накопления повреждений // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2013. № 11. С. 3–11.

11. Pavlov I. V., Razgulyaev S. V. Calculation of the basic reliability parameters for the model of a system with dual redundancy in different subsystems // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2020. Vol. 49, № 10. P. 829–835. doi: 10.3103/S1052618820100076
12. Pavlov I. V. Confidence limits for system reliability indices with increasing function of failure intensity // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2017. Vol. 46, № 2. P. 149–153. doi: 10.3103/S1052618817020133
13. Sidnyaev N. I. Methods for calculating the influence of the electrodynamic field in the ionosphere on a spacecraft // Cosmic Research. 2022. Vol. 60, № 3. P. 165–173. doi: 10.1134/S001095252202006X
14. Sidnyaev N. I., Butenko I. I., Bolotova E. E. Statistical and linguistic decision-making techniques based on fuzzy set theory // Advances in Intelligent Systems and Computing. 2020. Vol. 1127 AISC. doi: 10.1007/978-3-030-39216-1_16
15. Belyaev Y. K., Hajiyev A. H. Mathematical models of systems with several lifts and various control rules // Reliability: Theory and Applications. 2020. Vol. 15, № 2. P. 21–35. doi: 10.24411/1932-2321-2020-12002
16. Северцев Н. А., Зацаринный А. А. Учет случайности нагрузки и прочности в расчетах надежности конструкций оборонных технических систем для безопасной работы // Надежность и качество сложных систем. 2017. № 4. С. 90–96.

References

1. Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solov'ev A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti i ikh statisticheskiy analiz = Mathematical methods in reliability theory and their statistical analysis*. Moscow: URSS, 2013:584. (In Russ.)
2. Mikhaylov V.S., Yurkov N.K. *Integral'nye otsenki v teorii nadezhnosti. Vvedenie i osnovnye rezul'taty = Integral estimates in reliability theory. Introduction and main results*. Moscow: Tekhnosfera, 2020:148. (In Russ.)
3. Sadykhov G.S., Kudryavtseva S.S. Calculation and assessment of the average residual resource of non-recoverable objects depending on a given level of reliability. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin = Problems of mechanical engineering and reliability of machines*. 2022;(2):13–22. (In Russ.). doi: 10.31857/S0235711922020134
4. Sadykhov G.S., Savchenko V.P., Sidnyaev N.I. *Modeli i metody otsenki ostatochnogo resursa izdeliy radioelektroniki = Models and methods for estimating the residual life of radioelectronics products*. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2015:382. (In Russ.)
5. Petushkov V.A. To predict the residual life of structures with damage exposed to shock in operation. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin = Problems of mechanical engineering and machine reliability*. 2020;(3):91–105. (In Russ.). doi: 10.31857/S023571192002011X
6. Severtsev N.A., Yurkov N.K., Nguen K.T. The indicator "average residual period of utilization of technical facilities" and its properties. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo = Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality*. 2019;1:202. (In Russ.)
7. Hoeffding W. Probability inequalities for sums of bounded random variables. *Journal of the American Statistical Association*. 1963;(58):13–30.
8. Sadykhov G.S., Kuznetsov V.I. *Metody i modeli otsenok bezopasnosti sverkhnaznachennykh srokov ekspluatatsii tekhnicheskikh ob"ektov = Methods and models of safety assessments of over-designated service life of technical facilities*. Moscow: URSS, 2007:144. (In Russ.)
9. Artyukhov A.A. Estimates of the average operating time to failure with frequent triggers. *Novye informatsionnye tekhnologii v avtomatizirovannykh sistemakh = New information technologies in automated systems*. 2015;(18): 295–297. (In Russ.)
10. Dimitrienko Yu.I., Yurin Yu.V., Evropin S.V. Forecasting the durability and reliability of high-pressure structural elements. Part 1. Numerical simulation of damage accumulation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie = Proceedings of higher educational institutions. Mechanical engineering*. 2013;(11):3–11. (In Russ.)
11. Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Calculation of the basic reliability parameters for the model of a system with dual redundancy in different subsystems. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2020;49(10):829–835. doi: 10.3103/S1052618820100076
12. Pavlov I.V. Confidence limits for system reliability indices with increasing function of failure intensity. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2017;46(2):149–153. doi: 10.3103/S1052618817020133
13. Sidnyaev N.I. Methods for calculating the influence of the electrodynamic field in the ionosphere on a spacecraft. *Cosmic Research*. 2022;60(3):165–173. doi: 10.1134/S001095252202006X
14. Sidnyaev N.I., Butenko I.I., Bolotova E.E. Statistical and linguistic decision-making techniques based on fuzzy set theory. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2020;1127 AISC. doi: 10.1007/978-3-030-39216-1_16
15. Belyaev Y.K., Hajiyev A.H. Mathematical models of systems with several lifts and various control rules. *Reliability: Theory and Applications*. 2020;15(2):21–35. doi: 10.24411/1932-2321-2020-12002
16. Severtsev N.A., Zatsarinnyy A.A. Taking into account the randomness of load and strength in calculations of reliability of structures of defense technical systems for safe operation. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2017;(4):90–96. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Гулам Садых оглы Садыхов
доктор технических наук, профессор,
профессор кафедры вычислительной математики
и математической физики, главный научный сотрудник,
Московский государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана
(Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1)
E-mail: gsadykhov@gmail.com

Gulam S. Sadykhov
Doctor of technical sciences, professor,
professor of the sub-department of computational
mathematics and mathematical physics, chief researcher,
Bauman Moscow State Technical University
(building 1, 5 2nd Baumanskaya street,
Moscow, Russia)

Светлана Сергеевна Кудрявцева
старший преподаватель кафедры вычислительной
математики и математической физики,
Московский государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана
(Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1)
E-mail: kudryavctva@bmstu.ru

Svetlana S. Kudryavtseva
Senior lecturer of the sub-department of computational
mathematics and mathematical physics, Bauman
Moscow State Technical University
(building 1, 5 2nd Baumanskaya street,
Moscow, Russia)

Виктор Митрофанович Дубровин
кандидат технических наук, доцент,
доцент кафедры вычислительной математики
и математической физики,
Московский государственный технический
университет имени Н. Э. Баумана
(Россия, г. Москва, ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1)
E-mail: dubrovinvm1934@yandex.ru

Viktor M. Dubrovin
Candidate of technical sciences, associate professor,
associate professor of the sub-department
of computational mathematics and mathematical physics,
Bauman Moscow State Technical University
(building 1, 5 2nd Baumanskaya street,
Moscow, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.**

Поступила в редакцию/Received 22.12.2023
Поступила после рецензирования/Revised 19.01.2024
Принята к публикации/Accepted 15.02.2024