

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

DIAGNOSTIC METHODS FOR ENSURING RELIABILITY AND QUALITY OF COMPLEX SYSTEMS

УДК 519.24:53

doi:10.21685/2307-4205-2022-2-4

ОБЗОР НОВЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ НОРМАЛЬНОСТИ И РАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДАННЫХ МАЛЫХ ВЫБОРОК

А. П. Иванов¹, А. И. Иванов², А. В. Безяев³, Е. Н. Куприянов⁴,
А. Г. Банных⁵, К. А. Перфилов⁶, В. С. Лукин⁷, К. Н. Савинов⁸,
С. А. Полковникова⁹, Ю. И. Серикова¹⁰, А. Ю. Малыгин¹¹

^{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

² Пензенский научно-исследовательский электротехнический институт, Пенза, Россия

¹ ap_ivanov@pnzgu.ru, ² ivan@pniei.penza.ru, ^{3, 4, 5, 6, 8} tsib@pnzgu.ru,

⁷ ibst@pnzgu.ru, ^{9, 10} vt@pnzgu.ru, ¹¹ mal890@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается проблема параллельного использования множества статистических критериев, ориентированных на проверку той или иной статистической гипотезы. Как правило, на малых выборках в 16 опытов статистические критерии дают высокое значение вероятностей ошибок первого и второго рода. *Материалы и методы.* Однако если каждому из статистических критериев построить эквивалентный искусственный нейрон и объединить их в большую сеть искусственных нейронов, то мы получим длинный код с высокой избыточностью. Свертывание избыточности таких кодов позволяет корректировать ошибки некоторых статистических критериев. В работе приведены функциональные зависимости и пороги, используемые при программной реализации 11 новых критериев и эквивалентных им искусственных нейронов. Выделены несколько технических приемов модификации классических статистических критериев, позволяющих до девяти раз снизить значения их вероятностей ошибок первого и второго рода. *Результаты и выводы.* Предположительно, что применение новых статистических критериев может позволить принимать решения с доверительной вероятностью 0,99 при использовании 25 эквивалентных им искусственных нейронов.

Ключевые слова: классические и новые статистические критерии, искусственные нейроны эквивалентные статистическим критериям, параллельный статистический анализ малых выборок, корректировка ошибок выходного кода нейросети

Для цитирования: Иванов А. П., Иванов А. И., Безяев А. В., Куприянов Е. Н., Банных А. Г., Перфилов К. А., Лукин В. С., Савинов К. Н., Полковникова С. А., Серикова Ю. И., Малыгин А. Ю. Обзор новых статистических критериев проверки гипотезы нормальности и равномерности распределения данных малых выборок // Надежность и качество сложных систем. 2022. № 2. С. 33–44. doi:10.21685/2307-4205-2022-2-4

REVIEW OF NEW STATISTICAL CRITERIA FOR VERIFICATION OF THE HYPOTHESIS OF NORMALITY AND UNIFORMITY OF DISTRIBUTION OF DATA IN SMALL SAMPLES

**A.P. Ivanov¹, A.I. Ivanov², A.V. Bezyaev³, E.N. Kupriyanov⁴,
A.G. Bannykh⁵, K.A. Perfilov⁶, V.S. Lukin⁷, K.N. Savinov⁸,
S.A. Polkovnikova⁹, Yu.I. Serikova¹⁰, A.Yu. Malygin¹¹**

^{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11} Penza State University, Penza, Russia

² Penza Research Electrotechnical Institute, Penza, Russia

¹ ap_ivanov@pnzgu.ru, ² ivan@pniei.penza.ru, ^{3, 4, 5, 6, 8} tsib@pnzgu.ru,

⁷ ibst@pnzgu.ru, ^{9, 10} vt@pnzgu.ru, ¹¹ mal890@yandex.ru

Abstract. Background. The problem of parallel use of a set of statistical criteria aimed at testing one or another statistical hypothesis is considered. As a rule, on small samples of 16 experiments, statistical tests give a high value of the probabilities of errors of the first and second kind. *Materials and methods.* However, if we build an equivalent artificial neuron for each of the statistical criteria and combine them into a large network of artificial neurons, then we will get a long code with high redundancy. The reduction of the redundancy of such codes makes it possible to correct the errors of some statistical tests. The paper presents functional dependencies and thresholds used in the software implementation of 11 new criteria and artificial neurons equivalent to them. Several techniques for modifying classical statistical criteria are identified, which allow reducing the values of their probabilities of errors of the first and second kind by up to nine times. *Results and conclusions.* Presumably, the use of new statistical criteria can make it possible to make decisions with a confidence probability of 0,99 when using 25 artificial neurons equivalent to them.

Keywords: classical and new statistical criteria, artificial neurons equivalent to statistical criteria, parallel statistical analysis of small samples, error correction of the neural network output code

For citation: Ivanov A.P., Ivanov A.I., Bezyaev A.V., Kupriyanov E.N., Bannykh A.G., Perfilov K.A., Lukin V.S., Savinov K.N., Polkovnikova S.A., Serikova Yu.I., Malygin A.Yu. Review of new statistical criteria for verification of the hypothesis of normality and uniformity of distribution of data in small samples. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2022;(2):33–44. (In Russ.). doi:10.21685/2307-4205-2022-2-4

Введение

В прошлом веке было создано порядка 20 статистических критериев, ориентированных на проверку гипотезы нормального распределения данных, и примерно столько же критериев для проверки гипотезы равномерного распределения данных [1]. К сожалению, каждый из известных статистических критериев имеет свою нелинейную шкалу, соответственно, попытки их совместного использования приводят к необходимости решения сложной технической задачи сопряжения между собой множества непрерывных нелинейных шкал. Проблема усложняется, когда речь идет о статистическом анализе малых выборок. Для каждой выборки объемом 16, 17, 18 и так далее опытов для одного и того же статистического критерия получаются разные шкалы, т.е. приходится решать задачу эволюции нелинейных шкал в зависимости от размеров выборок малого объема.

Выйти из этого тупика удастся, если каждый статистический критерий представить эквивалентным ему искусственным нейроном (персептроном) с двухуровневым выходным квантователем [2, 3]. В этом случае проблема согласования множества нелинейных шкал сводится к проблеме свертывания кодов с высокой избыточностью с параллельным обнаружением и исправлением ошибок [4–6].

К сожалению, простейшие схемы свертывания кодов с высокой избыточностью плохо работают [2, 3]. Происходит это из-за сильной корреляционной сцепленности всех разрядов избыточных кодов. Так, если ориентироваться на использование 40 классических статистических критериев с показателем корреляционной сцепленности $E(|r|) = 0,399$ при среднем геометрическом вероятностей ошибок $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0,287$ каждого из критериев (каждого из эквивалентных им искусственных нейронов) и объеме выборки в 16 опытов, то использование 100 классических критериев позволяет снизить вероятности ошибок примерно в два раза до величины $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0,151$ [3]. Столь

значительный уровень ошибок неприемлем для практики. В связи с этим в начале 21 в. возник ренессанс интереса к синтезу новых статистических критериев, ориентированных на совместное использование в нейросетевых обобщениях [7].

Новые статистические критерии, синтезированные в начале 21 в.

Первым убедительным успехом в направлении синтеза новых критериев является применение суммы квадратов среднего геометрического плотности распределения и функции вероятности данных малых выборок [8–10]. Программная реализация этого критерия и вероятности выходных состояний его эквивалентного нейрона приведены на рис. 1.

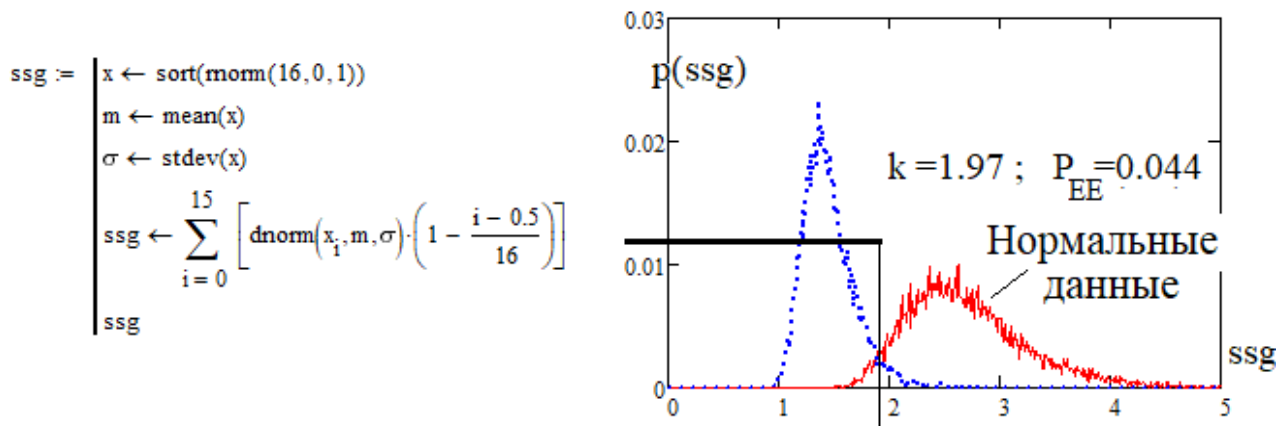


Рис. 1. Новый статистический критерий, показавший в 2014 г. рекордную мощность по отношению к классическим статистическим критериям

Из данных рис. 1 следует, что вероятности ошибок нового нейрона $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0,044$ снизились более чем в 5 раз по отношению к аналогичным данным рис. 5 наиболее мощного классического критерия [3]. Обнаружение столь значительного скачка мощности нового критерия вселило оптимизм в исследователей, что способствовало расширению работ по синтезу новых критериев. Однако преимущество роста мощности исчезает, если перейти к прямому вычислению показателя среднего геометрического малой выборки [11, 12], что отображено на рис. 2.

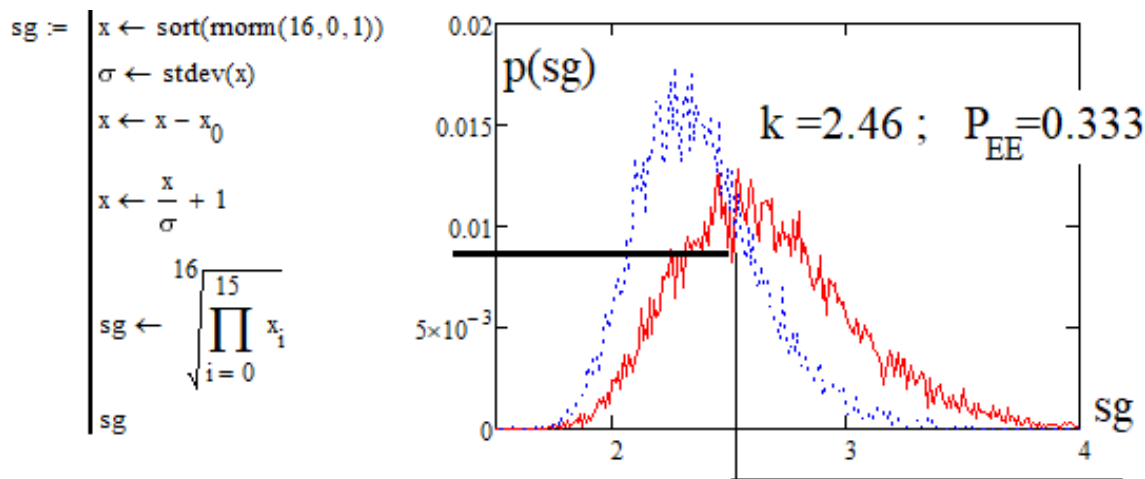


Рис. 2. Критерий среднего геометрического данных малой выборки

Очевидным является то, что наряду с использованием на практике критериев среднего геометрического [13, 14] мы имеем возможность обрабатывать данные в пространстве среднего гармонического [15–17]. Программа для воспроизведения нейрона среднего гармонического и плотности вероятности его выходных состояний для нормальных и равномерно распределенных данных приведены на рис. 3.

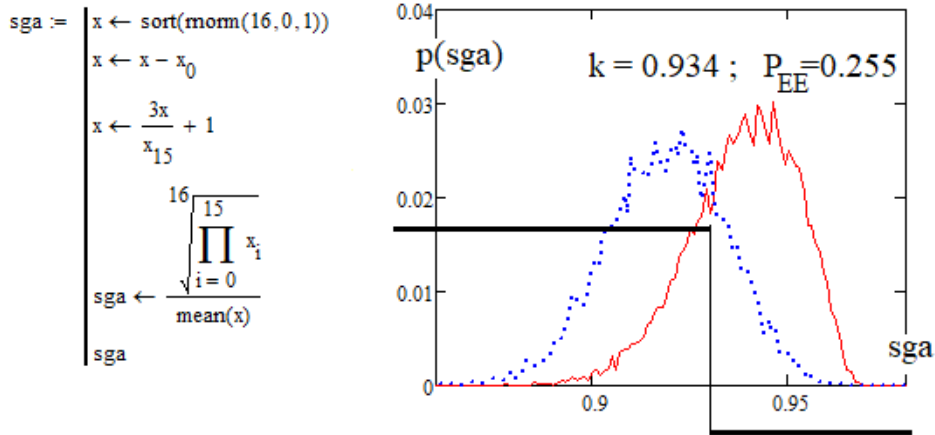


Рис. 3. Нейрон с накоплением данных в пространстве среднего гармонического

Отметим, что в теории статистической обработки данных [2] хорошо изучен критерий Крамера – фон Мизеса, синтезированный в 1928 г. Он построен на сравнении экспериментальной и теоретической функции вероятности. Очевидно, что мы можем построить дифференциальный аналог критерия Крамера – фон Мизеса [18, 19], сравнивая между собой экспериментальную и теоретическую плотности распределения значений. Программное обеспечение и результаты соответствующего численного эксперимента приведены на рис. 4.

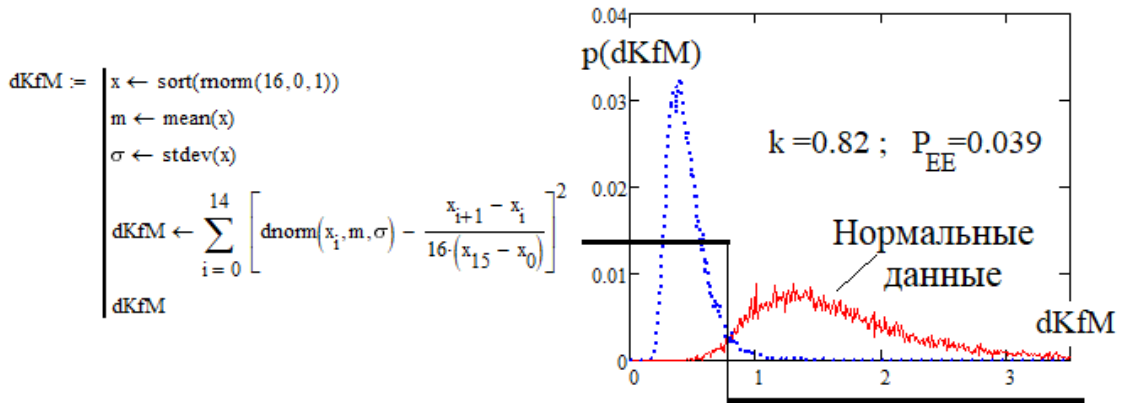


Рис. 4. Нейрон дифференциального аналога критерия Крамера – фон Мизеса 2016 г.

Мы наблюдаем скачек мощности нового дифференциального критерия примерно в 9 раз по сравнению с его классическим аналогом [3].

Аналогичная ситуация возникает и при переходе к использованию дифференциального аналога классического критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса, критерия Андерсона – Дарлинга, критерия Фроцини (рис. 5–7).

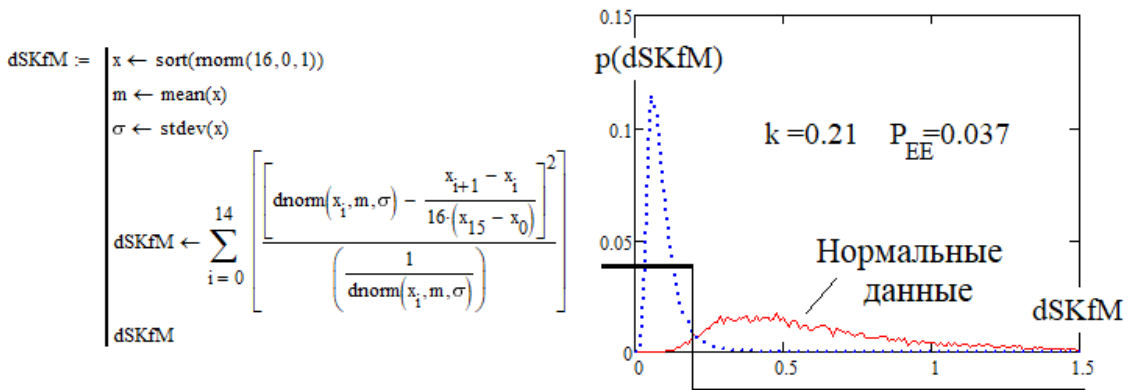


Рис. 5. Нейрон дифференциального аналога классического критерия Смирнова – Крамера – фон Мизеса 2016 г. [18, 19]

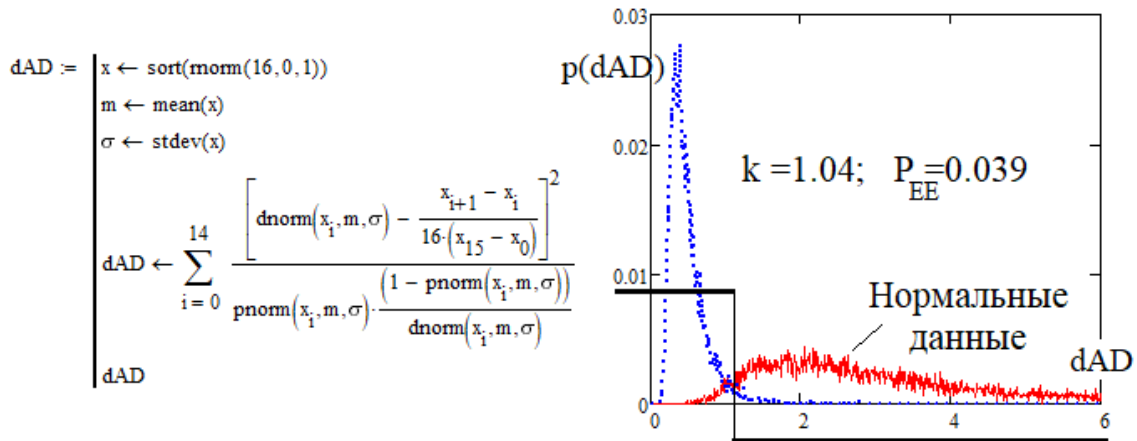


Рис. 6. Нейрон дифференциального аналога критерия Андерсона – Дарлинга 2016 г. [18, 19]

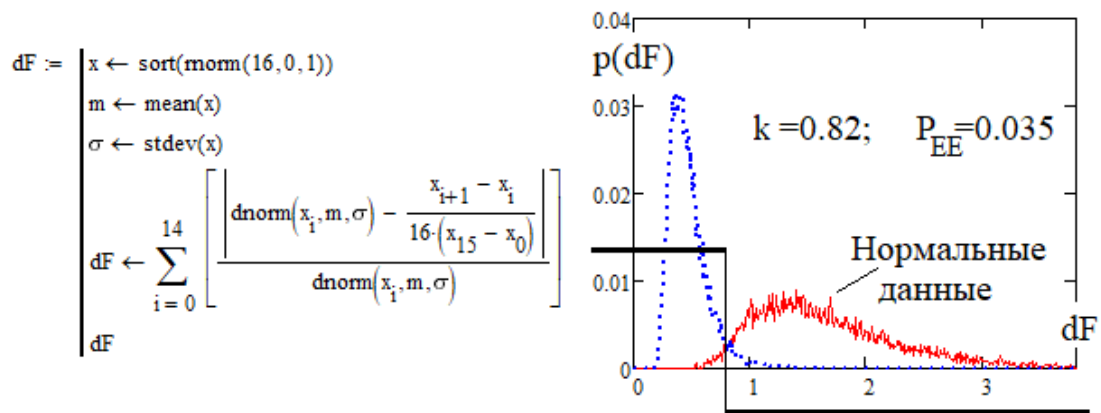


Рис. 7. Нейрон дифференциального аналога критерия Фроцини 2016 г. [18, 19]

Искусственные нейроны среднего геометрического и среднего гармонического похожи между собой по их функциональным связям и по их программной реализации [13, 14]. Как результат, мы имеем для них сопоставимые вероятностные характеристики. Так, исследуемые первыми нейроны суммы квадрата среднего геометрического (см. рис. 1) при отображении их в пространство среднего гармонического дают близкие вероятности ошибок. Программное обеспечение и результаты соответствующего численного эксперимента отображены на рис. 8.

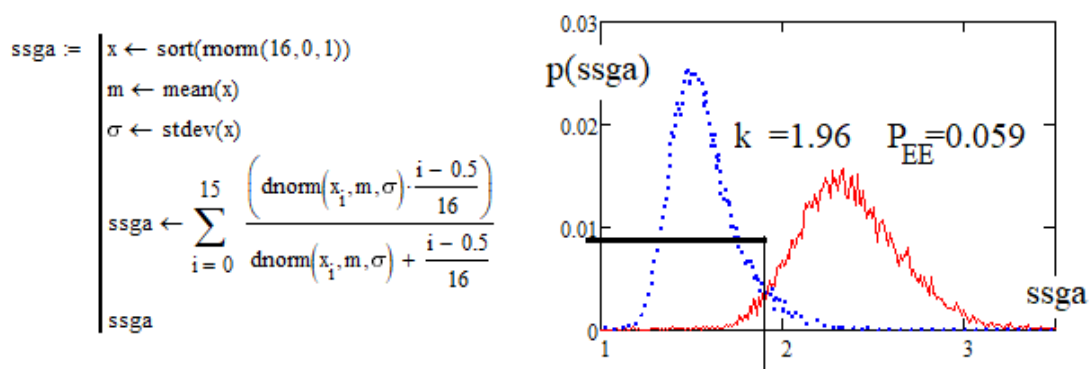


Рис. 8. Нейрон накопления среднего гармонического 2018 г.

Продолжение исследований по возможностям использования дифференциальной плотности распределений позволило в 2020 г. получить новый статистический критерий «суммы хвостов» [20]. Этот критерий построен на том, что вероятность наблюдения значительных «хвостов» нормально распределенных данных существенно меньше в сравнении с равномерно распределенными данными (рис. 9).

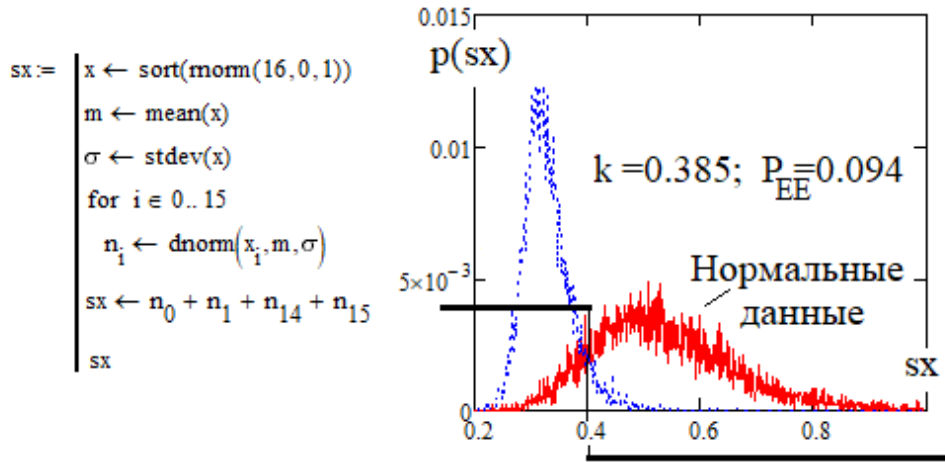


Рис. 9. Нейрон эквивалентный критерию «суммы хвостов» 2020 г. [20]

Примерно такой же результат получается и при применении функции вероятности нормально распределенных данных, если выполнить операцию дифференцирования (вычитания) данных экспериментального распределения и приближенной вероятности их появления [20]. Подтверждающие это данные приведены на рис. 10.

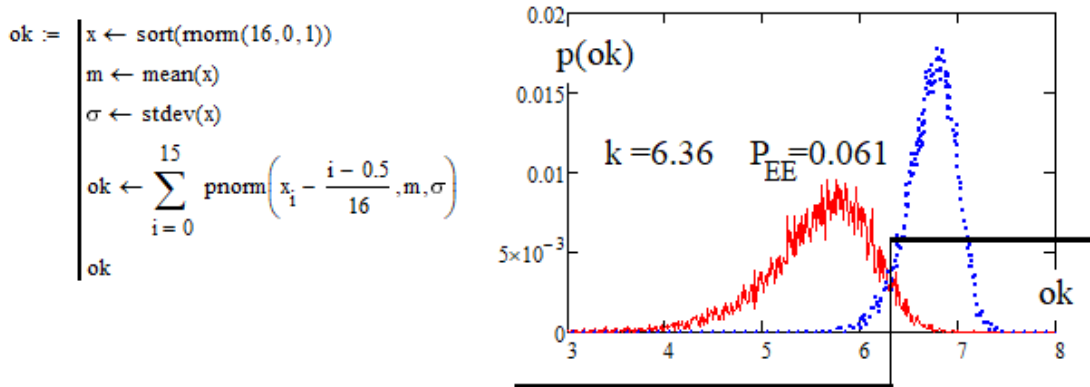


Рис. 10. Нейрон функции вероятности с псевдодифференцированием входных данных 2020 г. [20]

Еще один вариант синтеза нового статистического критерия выполняется через простое дифференцирование случайных входных данных малой выборки с его умножением на теоретическую плотность вероятности. При вычислении дифференциала данных малой выборки выполнена регуляризация расчетов, исключающая случайное деление разности на ноль. Результаты численного эксперимента приведены на рис. 11 [21].

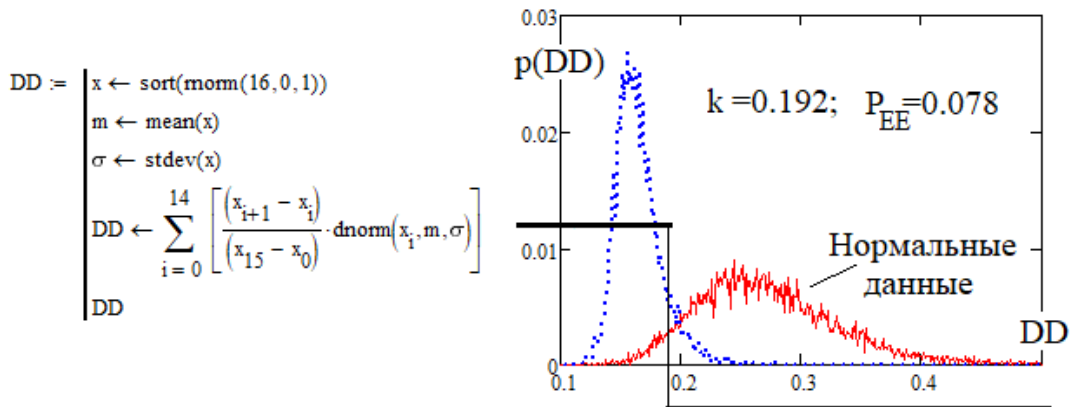


Рис. 11. Нейрон эквивалентный критерию двойного дифференцирования входных данных малой выборки 2021 г. [21]

**Групповое сравнение 11 новых статистических критериев
с потенциалом классических статистических критериев**

В предыдущей статье [3] было вычислено среднее геометрическое вероятностей ошибок первого и второго рода для 9 классических статистических критериев, составляющее значение $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0,287$. Вычисление значений для 11 рассматриваемых выше новых критериев дает величину $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0,07$. Это свидетельствует о росте относительной мощности новых статистических критериев примерно в четыре раза. Однако простого роста мощности по среднему геометрическому в группе сопрягаемых статистических критериев недостаточно. Дополнительно нужно учитывать корреляционные связи в группе. В табл. 2 приведены коэффициенты парной корреляции между рассмотренными критериями.

Таблица 2

Мощность новых статистических критериев и коэффициенты парной корреляции между ними

P_{EE}		2014	2014	2016	2016	2016	2016	2017	2018	2020	2020	2021
		ssg	sg	dKfM	dSKfM	dAD	dF	sga	ssga	ok	sx	DD
0.044	ssg	1	0.053	0.978	0.916	0.917	0.978	0.13	0.319	-0.969	0.769	0.833
0.333	sg		1	0.092	0.073	0.05	0.089	0.813	0.054	0.173	-0.054	-0.411
0.039	dKfM			1	0.975	0.973	1	0.147	0.316	-0.942	0.733	0.806
0.037	dSKfM				1	0.997	0.975	0.114	0.298	-0.903	0.684	0.766
0.039	dAD					1	0.973	0.081	0.298	-0.91	0.716	0.79
0.035	dF						1	0.145	0.316	-0.942	0.734	0.807
0.255	sga							1	0.044	0.039	-0.134	-0.352
0.059	ssga								1	-0.303	0.27	0.262
0.061	ok									1	-0.789	-0.918
0.094	sx										1	0.754
0.078	DD											1

Среднее значение модулей коэффициентов парной корреляции новых статистических критериев составляет значение $E(|r|) = 0,578$, что несколько хуже в сравнении с этим же показателем у классических статистических критериев $E(|r|) = 0,4$. Для сравнения групповых возможностей классических и новых статистических критериев выполним их симметризацию [22] и численное моделирование симметричных сетей искусственных нейронов. Результаты численного моделирования отображены в логарифмических координатах на рис. 12.

В верхней части рис. 12 отображены данные классических нейронов с относительно низким качеством принятия решений, ранее приведенные в работе [3]. В нижней части рисунка отображены три линии экстраполяции прогнозов, построенные на численном моделировании на языке MathCAD для простейших корректоров ошибок для 9 новых более мощных статистических критериев. Из данных рис. 12 видно, что простое увеличение мощности через снижение среднего геометрического вероятностей ошибок с величины 0,287 до величины 0,07 при сохранении среднего значения модулей корреляции дает верхнюю прямую нижней части рисунка. Две верхние прямые рис. 12 параллельны. Нижняя из двух верхних параллельных прямых является оценкой сверху вероятностей ошибок. Пессимистическая оценка сверху построена на предположении о совпадении коэффициентов корреляции у новых статистических критериев и классических статистических критериев.

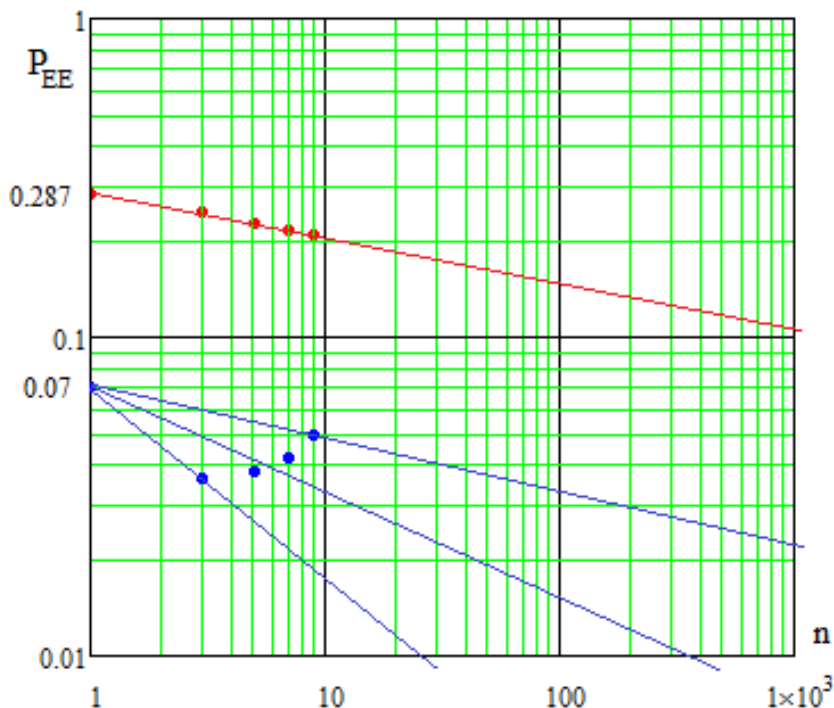


Рис. 12. Результаты численного моделирования связи вероятности ошибок первого и второго рода и числа необходимых искусственных нейронов

Оптимистической является оценка по нижней прямой, которая построена на точке среднего геометрического 0,07 и точке корректора избыточного кода трех искусственных нейронов. Эта оптимистическая оценка позволяет надеяться на то, что приемлемые для практики вероятности ошибок первого и второго рода $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0,01$ могут быть достигнуты при использовании примерно 25 новых статистических критериев.

Точкам, соответствующим сетям с 5, 7, 9 искусственными нейронами, доверять нельзя, так как они показывают снижение качества принимаемых нейросетями решений. Скорее всего это эффект накопления ошибок из-за ограниченного числа данных при проведении численного эксперимента (выборка из 9999 опытов) и малого числа учитываемых разрядов (эффекта блуждания статистических оценок математических ожиданий и стандартных отклонений). Тем не менее мы всегда можем построить усредненную оценку между оптимистической и пессимистической оценками. Такая усредненная оценка соответствует центральной прямой (центральному лучу, исходящему из точки $P_1 \approx P_2 \approx P_{EE} \approx 0,07$).

Список литературы

1. Кобзарь А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. М. : Физматлит, 2006. 816 с.
2. Иванов А. П., Иванов А. И., Безяев А. В. [и др.]. Альбом статистических критериев, ориентированных на совместное использование при проверке гипотезы нормального или равномерного распределения данных малых выборок : препринт. Пенза, 2022. 22 с. doi:10.13140/RG.2.2.15891.76324.
3. Иванов А. П., Иванов А. И., Малыгин А. Ю. [и др.]. Альбом из девяти классических статистических критериев для проверки гипотезы нормального или равномерного распределения данных малых выборок // Надежность и качество сложных систем. 2022. № 1. С. 20–29.
4. Морелос-Сарагоса Р. Искусство помехоустойчивого кодирования. М. : Техносфера, 2007. 320 с.
5. Безяев А. В. Биометрико-нейросетевая аутентификация: обнаружение и исправление ошибок в длинных кодах без накладных расходов на избыточность : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 40 с.
6. Иванов А. И., Банных А. Г., Безяев А. В. Искусственные молекулы, собранные из искусственных нейронов, воспроизводящих работу классических статистических критериев // Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2020. № 1. С. 26–32.
7. Иванов А. И., Банных А. Г., Куприянов Е. Н. [и др.]. Коллекция искусственных нейронов эквивалентных статистическим критериям для их совместного применения при проверке гипотезы нормальности малых

выборки биометрических данных // Безопасность информационных технологий : сб. науч. ст. по материалам I Всерос. науч.-техн. конф. Пенза, 2019. С. 156–164.

8. Перфилов К. А. Критерий среднего геометрического, используемый для проверки достоверности статистических гипотез распределения биометрических данных // Труды научно-технической конференции кластера пензенских предприятий, обеспечивающих безопасность информационных технологий. Пенза, 2014. Т. 9. С. 92–93. URL: <http://www.pniei.penza.ru/RV-conf/T9/C92>
9. Перфилов К. А., Иванов А. И., Проценко Е. Д. Расширение многообразия статистических критериев, используемых при проверке гипотез распределения значений биометрических данных // Европейский союз ученых. 2015. № 13, ч. 5. С. 9–12.
10. Иванов А. И., Перфилов К. А., Малыгина Е. А. Многомерный статистический анализ качества биометрических данных на предельно малых выборках с использованием критериев среднего геометрического, вычисленного для анализируемых функций вероятности // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2016. № 2. С. 58–66.
11. Иванов А. И., Перфилов К. А., Малыгина Е. А. Оценка качества малых выборок биометрических данных с использованием дифференциального варианта статистического критерия среднего геометрического // Вестник СИБГАУ. 2016. № 4. С. 864–871.
12. Волчихин В. И., Иванов А. И., Перфилов К. А. [и др.]. Быстрый алгоритм обучения сетей искусственных нейронов квадрата среднего геометрического плотностей распределения значений многомерных биометрических данных // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2018. № 3. С. 23–35.
13. Иванов А. И., Перфилов К. А., Лукин В. С. Нейросетевое обобщение семейства статистических критериев среднего геометрического и среднего гармонического для прецизионного анализа малых выборок биометрических данных // Информационно-управляющие телекоммуникационные системы, средства поражения и их техническое обеспечение : сб. науч. ст. Всерос. науч.-техн. конф. / под общ. ред. В. С. Безяева. Пенза : АО «НПП "Рубин"», 2019. С. 50–63.
14. Лукин В. С. Сравнение мощности обычной и логарифмической форм статистических критериев среднего гармонического при использовании для проверки гипотезы нормального распределения данных малой выборки // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2020. № 4. С. 19–26.
15. Лукин В. С., Иванов А. И. Доверенный искусственный интеллект, построенный с использованием нейронов среднего гармонического // Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века : сб. ст. по материалам Седьмой Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием (г. Пермь, 21–22 октября 2021 г.). Пермь, 2021. С. 441–445.
16. Лукин В. С. Иванов А. И. Оптимизация процедуры нормирования и смещения входных данных для нейронов среднего гармонического, используемых при проверке гипотезы нормального распределения малых выборок // Динамика систем, механизмов и машин. 2021. Т. 9, № 4. doi:10.25206/2310-9793-9-4-11-14
17. Иванов А. И. Многомерная нейросетевая обработка биометрических данных с программным воспроизведением эффектов квантовой суперпозиции. Пенза : Изд-во АО «ПНИЭИ», 2016. 133 с. URL: <http://пниэи.рф/activity/science/BOOK16.pdf>
18. Волчихин В. И., Иванов А. И., Перфилов К. А. [и др.]. Быстрый алгоритм обучения сетей искусственных нейронов квадрата среднего геометрического плотностей распределения значений многомерных биометрических данных // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2018. № 3. С. 23–35.
19. Иванов А. И. Искусственные математические молекулы: повышение точности статистических оценок на малых выборках (программы на языке MathCAD) : препринт. Пенза : Изд-во ПГУ, 2020. 36 с.
20. Иванов А. И., Малыгин А. Ю., Полковникова С. А. Новый статистический критерий большой мощности, полученный дифференцированием случайных данных малой выборки // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. 2021. № 3. С. 67–74. doi:10.21685/2072-3059-2021-3-7
21. Иванов А. И., Банных А. Г., Серикова Ю. И. Учет влияния корреляционных связей через их усреднение по модулю при нейросетевом обобщении статистических критериев для малых выборок // Надежность. 2020. № 20. С. 28–34. doi:10.21683/1729-2646-2020-20-2-28-34

References

1. Kobzar' A.I. *Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov = Applied mathematical statistics. For engineers and researchers*. Moscow: Fizmatlit, 2006:816. (In Russ.)
2. Ivanov A.P., Ivanov A.I., Bezyaev A.V. [et al.]. *Al'bom statisticheskikh kriteriev, orientirovannykh na sovmestnoe ispol'zovanie pri provere gipotezy normal'nogo ili ravnomernogo raspredeleniya dannykh malykh vyborok: preprint = Album of statistical criteria focused on sharing when testing the hypothesis of normal or uniform distribution of small sample data : preprint*. Penza, 2022:22. (In Russ.). doi:10.13140/RG.2.2.15891.76324.
3. Ivanov A.P., Ivanov A.I., Malygin A.Yu. [et al.]. An album of nine classical statistical criteria for testing the hypothesis of normal or uniform distribution of small sample data. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2022;(1):20–29. (In Russ.)

4. Morelos-Saragosa R. *Iskusstvo pomexhoustoychivogo kodirovaniya = The art of noise-resistant coding*. Moscow: Tekhnosfera, 2007:320. (In Russ.)
5. Bezyaev A.V. *Biometriko-neyrosetevaya autentifikatsiya: obnaruzhenie i ispravlenie oshibok v dlinnykh kodakh bez nakladnykh raskhodov na izbytochnost': preprint = Biometric-neural network authentication: detection and correction of errors in long codes without redundancy overhead : preprint*. Penza: Izd-vo PGU, 2020:40. (In Russ.)
6. Ivanov A.I., Bannykh A.G., Bezyaev A.V. Artificial molecules assembled from artificial neurons reproducing the work of classical statistical criteria. *Vestnik Permskogo universiteta. Ser.: Matematika. Mekhanika. Informatika = Bulletin of the Perm University. Ser.: Matematika. Mechanics. Computer science*. 2020;(1):26–32. (In Russ.)
7. Ivanov A.I., Bannykh A.G., Kupriyanov E.N. [et al.]. Collection of artificial neurons equivalent to statistical criteria for their joint application when testing the hypothesis of normality of small samples of biometric data. *Bezopasnost' informatsionnykh tekhnologiy: sb. nauch. st. po materialam I Vseros. nauch.-tekhn. konf. = Information technology security : collection of scientific articles based on the materials of I All-Russian Scientific-technical. conf*. Penza, 2019:156–164. (In Russ.)
8. Perfilov K.A. The criterion of the geometric mean used to verify the reliability of statistical hypotheses of the distribution of biometric data. *Trudy nauchno-tehnicheskoy konferentsii klastera penzenskikh predpriyatiy, obespechivayushchikh bezopasnost' informatsionnykh tekhnologiy = Proceedings of the scientific and technical conference of the cluster of Penza enterprises ensuring the security of information technologies*. Penza, 2014;9:92–93. (In Russ.). Available at: <http://www.pniei.penza.ru/RV-conf/T9/S92>
9. Perfilov K.A., Ivanov A.I., Protsenko E.D. Expansion of the variety of statistical criteria used in testing hypotheses of the distribution of biometric data values. *Evropeyskiy soyuz uchenykh = European Union of Scientists*. 2015;(13):9–12. (In Russ.)
10. Ivanov A.I., Perfilov K.A., Malygina E.A. Multidimensional statistical analysis of the quality of biometric data on extremely small samples using geometric mean criteria calculated for the analyzed probability functions. *Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' = Measurement. Monitoring. Management. Control*. 2016;(2):58–66. (In Russ.)
11. Ivanov A.I., Perfilov K.A., Malygina E.A. Evaluation of the quality of small samples of biometric data using a differential variant of the statistical criterion of the geometric mean. *Vestnik SIBGAU = Bulletin of SIBGAU*. 2016;(4):864–871. (In Russ.)
12. Volchikhin V.I., Ivanov A.I., Perfilov K.A. [et al.]. Fast algorithm training networks of artificial neurons of the square of the geometric mean densities of the distribution of values of multidimensional biometric data. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskije nauki = Proceedings of higher educational institutions. Volga region. Technical sciences*. 2018;(3):23–35. (In Russ.)
13. Ivanov A.I., Perfilov K.A., Lukin V.S. Neural network generalization of a family of statistical criteria of geometric mean and harmonic mean for precision analysis of small samples of biometric data. *Informatsionno-upravlyayushchie telekommunikatsionnye sistemy, sredstva porazheniya i ikh tekhnicheskoe obespechenie: sb. nauch. st. Vseros. nauch.-tekhn. konf. = Information and control telecommunication systems, means of communication and their technical support : collection of scientific articles of All-Russian Scientific and technical. conf*. Penza: AO «NPP "Rubin"», 2019:50–63. (In Russ.)
14. Lukin V.S. Comparison of the power of the usual and logarithmic forms of statistical criteria of the harmonic mean when used to test the hypothesis of the normal distribution of small sample data. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskije nauki = Proceedings of higher educational institutions. Volga region. Technical sciences*. 2020;(4):19–26. (In Russ.)
15. Lukin V.S., Ivanov A.I. Trusted artificial intelligence built with the use of medium harmonic neurons. *Iskusstvennyy intellekt v reshenii aktual'nykh sotsial'nykh i ekonomicheskikh problem KhKhI veka: sb. st. po materialam Sed'moy Vseros. nauch.-prakt. konf. s mezhdunar. uchastiem (g. Perm', 21–22 oktyabrya 2021 g.) = Artificial intelligence in solving actual social and economic problems of the XXI century : collection of articles based on the materials of the Seventh All-Russian Scientific and Practical Conference with international participation (Perm, October 21–22, 2021)*. Perm, 2021:441–445. (In Russ.)
16. Lukin V.S. Ivanov A.I. Optimization of the procedure of normalization and bias of input data for harmonic mean neurons used in testing the hypothesis of the normal distribution of small samples. *Dinamika sistem, mekhanizmov i mashin = Dynamics of systems, mechanisms and machines*. 2021;9(4). (In Russ.). doi:10.25206/2310-9793-9-4-11-14
17. Ivanov A.I. *Mnogomernaya neyrosetevaya obrabotka biometricheskikh dannykh s programmnyim vosproizvedeniem effektivov kvantovoy superpozitsii = Multidimensional neural network processing of biometric data with software reproduction of quantum superposition effects*. Penza: Izd-vo AO «PNIEI», 2016:133. (In Russ.). Available at: <http://pniei.pf/activity/science/BOOK16.pdf>
18. Volchikhin V.I., Ivanov A.I., Perfilov K.A. [et al.]. Fast algorithm for training networks of artificial neurons of the square of the geometric mean densities of the distribution of values of multidimensional biometric data. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskije nauki = Proceedings of higher educational institutions. Volga region. Technical sciences*. 2018;(3):23–35. (In Russ.)

19. Ivanov A.I. *Iskusstvennyye matematicheskie molekuly: povyschenie tochnosti statisticheskikh otsenok na malykh vyborkakh (programmy na yazyke MathCAD): preprint = Artificial mathematical molecules: improving the accuracy of statistical estimates on small samples (programs in MathCAD) : preprint*. Penza: Izd-vo PGU, 2020:36. (In Russ.)
20. Ivanov A.I., Malygin A.Yu., Polkovnikova S.A. A new statistical criterion of high power obtained by differentiating random data of a small sample. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki = Proceedings of higher educational institutions. Volga region. Technical sciences*. 2021;(3):67–74. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3059-2021-3-7
21. Ivanov A.I., Bannykh A.G., Serikova Yu.I. Accounting for the influence of correlations through their modulus averaging in neural network generalization of statistical criteria for small samples. *Nadezhnost' = Reliability*. 2020;(20):28–34. (In Russ.). doi:10.21683/1729-2646-2020-20-2-28-34

Информация об авторах / Information about the authors

Алексей Петрович Иванов

кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой технических средств
информационной безопасности,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: ap_ivanov@pnzgu.ru

Александр Иванович Иванов

доктор технических наук, доцент,
ведущий научный сотрудник,
Пензенский научно-исследовательский
электротехнический институт
(Россия, г. Пенза, ул. Советская, 9)
E-mail: ivan@pniei.penza.ru

Александр Викторович Безяев

кандидат технических наук, докторант,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: tsib@pnzgu.ru

Евгений Николаевич Куприянов

аспирант,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: evgnkupr@gmail.com

Андрей Григорьевич Банных

аспирант,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: tsib@pnzgu.ru

Константин Александрович Перфилов

аспирант,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: tsib@pnzgu.ru

Aleksey P. Ivanov

Candidate of technical sciences, associate professor
head of the sub-department of technical means
of information security,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Aleksandr I. Ivanov

Doctor of technical sciences, associate professor,
senior researcher,
Penza Research Electrotechnical Institute
(9 Sovetskaya street, Penza, Russia)

Aleksandr V. Bezyaev

Candidate of technical sciences,
doctor's degree student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Evgeniy N. Kupriyanov

Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Andrey G. Bannykh

Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Konstantin A. Perfilov

Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Виталий Сергеевич Лукин

младший научный сотрудник,
Региональный учебно-научный центр
«Информационная безопасность»,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: ibst@pnzgu.ru

Константин Николаевич Савинов

старший преподаватель,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: tsib@pnzgu.ru

Светлана Андреевна Полковникова

аспирант,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: vt@pnzgu.ru

Юлия Игоревна Серикова

аспирант,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: vt@pnzgu.ru

Александр Юрьевич Малыгин

доктор технических наук, профессор,
начальник межотраслевой лаборатории тестирования
биометрических устройств и технологий,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: mal890@yandex.ru

Vitaliy S. Lukin

Junior researcher,
Regional Training and Research Center
"Information Security",
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Konstantin N. Savinov

Senior lecturer,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Svetlana A. Polkovnikova

Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Yuliya I. Serikova

Postgraduate student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Aleksandr Yu. Malygin

Doctor of technical sciences, professor,
head of the Intersectoral testing laboratory
of biometric devices and technologies,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.**

Поступила в редакцию/Received 15.12.2021

Поступила после рецензирования/Revised 10.01.2022

Принята к публикации/Accepted 15.02.2022