

# МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОТОТИПИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ КАК ИНСТРУМЕНТ СИНТЕЗА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЯДРА ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

**И. Е. Старостин**

Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия  
starostinigo@yandex.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Цифровой двойник по своей сути представляет собой цифровую копию объекта, благодаря непрерывному обмену данными с объектом воспроизводящую актуальное его состояние. Это достигается путем применения в качестве математического ядра цифрового двойника математической модели, основывающейся на реальном поведении объекта, параметры которой обновляются в соответствии с актуальной информацией, получаемой с объекта. Для построения моделей систем различной физической и химической природы авторами был предложен метод математического прототипирования энергетических процессов, основывающийся на методах современной неравновесной термодинамики, механики, электродинамики. Благодаря чему упомянутый метод позволяет создать модели динамики процессов в системе, не противоречащие общим физическим законам, а также особенностям протекания процессов в конкретной физической или химической системе. Затем полученные модели преобразовываются к моделям систем, применимых для решения практических задач, с точностью до определяемых из экспериментальных данных постоянных коэффициентов. Однако здесь актуальным является вопрос выбора базиса, в котором строится преобразованная модель рассматриваемой системы и выбора алгоритма обучения предложенной модели. Решению приведенных вопросов посвящена настоящая работа. *Материалы и методы.* Синтез уравнений динамики физических и химических процессов осуществляется на базе метода математического прототипирования энергетических процессов. Преобразованные модели строятся путем качественного анализа динамик системы в различных режимах ее работы с последующим анализом связей между параметрами ее динамик и параметрами входных воздействий с дальнейшим построением интерполяционной преобразованной модели. Интерполяционные методы выбираются на основе вышеупомянутых результатов качественного анализа. *Результаты.* Предложенная концепция построения моделей системы дает корректные модели системы, вбирающие в себя качественное ее поведение. Это обеспечивает корректность математического ядра цифровых двойников при работе систем в различных режимах работы системы, для которых строятся вышеупомянутые цифровые двойники. *Выводы.* Предложенная концепция программной части цифровых двойников имеет широкую область их применения благодаря широте областей применимости метода математического прототипирования энергетических процессов.

**Ключевые слова:** метод математического прототипирования энергетических процессов, цифровые двойники, интерполяция, качественный анализ

**Для цитирования:** Старостин И. Е. Метод математического прототипирования энергетических процессов как инструмент синтеза математического ядра цифровых двойников различных физико-химических систем // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 3. С. 41–50. doi: 10.21685/2307-4205-2024-3-5

## METHOD OF MATHEMATICAL PROTOTYPING OF ENERGY PROCESSES AS A TOOL FOR SYNTHESIS OF THE MATHEMATICAL KERNEL OF DIGITAL TWINNINGS OF DIFFERENT PHYSICAL AND CHEMICAL SYSTEMS

**I.E. Starostin**

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia  
starostinigo@yandex.ru

**Abstract.** *Background.* A digital twin is essentially a digital copy of an object, which, thanks to the continuous exchange of data with the object, reproduces its current state. This is achieved by using a mathematical model as the mathematical core of the digital twin, based on the real behavior of the object, the parameters of which are updated in accordance with the current information received from the object. To build models of systems of various physical

and chemical natures, the authors proposed a method for mathematical prototyping of energy processes, based on the methods of modern nonequilibrium thermodynamics, mechanics, and electrodynamics. Due to this, the mentioned method provides models of the dynamics of processes in a system that do not contradict general physical laws, as well as the peculiarities of the course of processes in a specific physical or chemical system. Then the resulting models are converted to models of systems applicable to solve practical problems, up to constant coefficients determined from experimental data. However, the relevant issue here is the choice of basis in which the transformed model of the system under consideration is built and the choice of training algorithm for the proposed model. This work is devoted to solving the above questions. *Materials and methods.* The synthesis of equations for the dynamics of physical and chemical processes is carried out on the basis of the method of mathematical prototyping of energy processes. Transformed models are built by qualitative analysis of the dynamics of the system in various modes of its operation, followed by analysis of the relationships between the parameters of its dynamics and the parameters of input influences with the further construction of an interpolation transformed model. Interpolation methods are selected based on the above-mentioned results of qualitative analysis. *Results.* The proposed concept of constructing system models provides correct models of the system that incorporate its qualitative behavior. This ensures the correctness of the mathematical core of digital twins when operating systems in various operating modes of the system for which the above-mentioned digital twins are built. *Conclusions.* The proposed concept of the software part of digital twins has a wide range of application due to the breadth of areas of applicability of the method of mathematical prototyping of energy processes.

**Keywords:** method of mathematical prototyping of energy processes, digital twins, interpolation, qualitative analysis

**For citation:** Starostin I.E. Method of mathematical prototyping of energy processes as a tool for synthesis of the mathematical kernel of digital twins of different physical and chemical systems. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2024;(3):41–50. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-3-5

### Введение

Концепция цифрового двойника призвана помочь предприятиям быстрее обнаруживать физические проблемы, точнее предсказывать их результаты и производить более качественные продукты [1–4]. Также цифровые двойники, позволяющие в режиме реального времени диагностировать и прогнозировать различные дефекты, аварийные режимы, имеют важное значение в процессе эксплуатации и технического обслуживания объекта [1–4]. Важнейшей составляющей математического ядра (МЯ) цифрового двойника является математическая модель, воспроизводящая реальное поведение объекта [5].

Для построения упомянутых математических моделей (ММ) объектов, характеризующихся протеканием в них физических и химических процессов, автором был предложен в рамках современной неравновесной термодинамики, механики и электродинамики метод математического прототипирования энергетических процессов (ММПЭП) [6–8]. Построенные ММПЭП модели динамики процессов различной физической и химической природы не противоречат общим физическим законам (законам сохранения, началам термодинамики, и т.д.), а также физическим особенностям протекания процессов в рассматриваемом объекте [6, 7]. ММ системы, которая является основой математического ядра цифровых двойников, получается путем преобразования уравнений ММПЭП [7, 8], задав аналитическое выражение общего решения систем дифференциальных уравнений ММПЭП, вбирающего в себя физические особенности протекания процессов в рассматриваемом объекте [7].

Упомянутые аналитические выражения преобразованной ММ могут быть заданы с использованием методов интерполяции опорных динамик (также вбирающих в себя физические особенности функционирования конкретной системы) [7, 9]. Это также гарантирует корректность преобразованных аналитических моделей [7]. Также использование методов интерполяции дает возможность строить ММ непосредственно на опорных экспериментальных данных [7, 9]. Настоящая работа посвящена построению ММ, положенных в основу МЯ цифрового двойника.

### Материалы и методы

В соответствие с ММПЭП состояние системы характеризуется независимо от ее предыстории параметрами состояния, изменяющимися в результате протекания физических и химических процессов в ней [6]. Причиной протекания процессов в системе являются динамические силы, определяемые через частные производные свободной энергии по координатам состояния, расходуемой на протекание процессов в системе [6]. Однако динамические силы однозначно не определяют протекание процессов в системе; независимо от динамических сил протекание процессов в системе определяется кинетическими свойствами, «шкалой» которых является кинетическая матрица (рис. 1) [6]. Динамика процессов в системе в свою очередь определяет динамику измеряемых пара-

метров (ИП) и контролируемых параметров (КП) (см. рис. 1) [6]. Приведенные на рис. 1 факторы определяют общую структуру дифференциальных уравнений динамики процессов, а также динамики ИП и КП, получаемых ММПЭП [6].

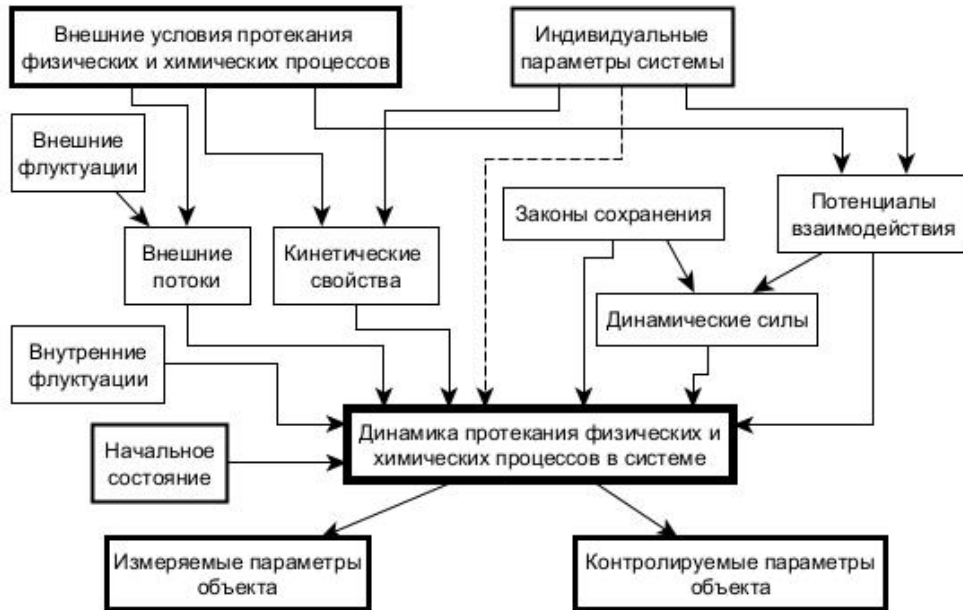


Рис. 1. Факторы, определяющие динамику физических и химических процессов

В общем случае ММ объекта (рис. 2) представляет собой алгоритм определения из экспериментальных данных ИП объекта начального состояния и индивидуальных параметров системы с последующим определением КП системы (с учетом внешних условий протекания процессов) (видно из рис. 1) [6, 8].

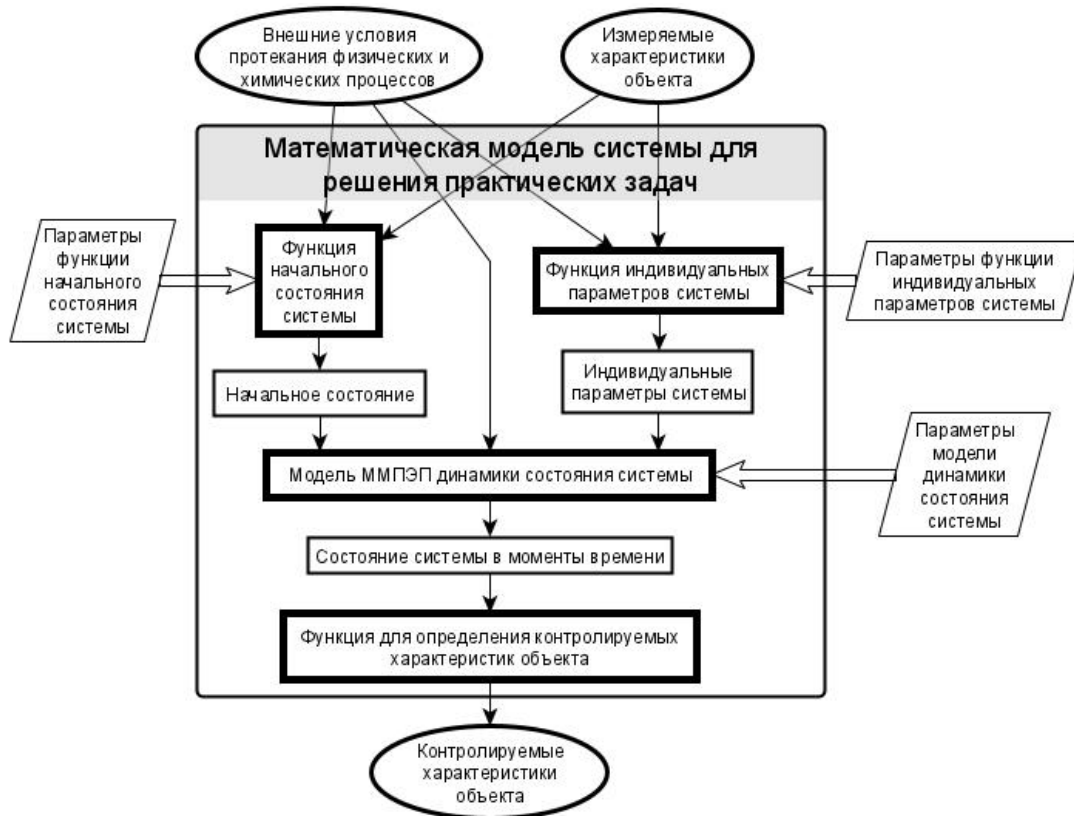


Рис. 2. Математическая модель системы для решения практических задач. В параллелограммах приведены обучаемые параметры модели

Следует отметить, что в КП системы могут войти и ее ИП в последующие моменты времени [8]. Структура модели объекта (рис. 2) строится на основе аналитического выражения динамики (вбирающего в себя физику рассматриваемого объекта) и вышеупомянутых функций [7, 8].

Аналитически общее решение системы дифференциальных уравнений ММПЭП представимо в виде [7]:

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \Delta \tilde{\mathbf{x}}^* \left( \varepsilon(\varepsilon_0, t), \hat{\mathbf{u}}(t, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \tilde{\mathbf{s}}(t) \right), \quad \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}[U(t)], \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}^* \left( \Delta \mathbf{x}(t), \hat{\mathbf{u}}(t, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{q}_{\text{топ}}, \hat{\mathbf{s}}^* \left( \varepsilon(\varepsilon_0, t), \hat{\mathbf{u}}(t, \hat{\mathbf{u}}), \tilde{\mathbf{s}}(t), \mathbf{q}_{\text{упр}} \right) \right), \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{s}}(t) = \hat{\mathbf{s}} \left( \varepsilon(\varepsilon_0, t), \hat{\mathbf{u}}(t, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{q}_{\text{упр}} \right), \quad \varepsilon_0 = \tilde{\mathbf{x}}^{*-1} \left( \mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{u}}(0, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{q}_{\text{топ}}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{q}_{\text{упр}} \right), \quad (3)$$

$$\varepsilon(\varepsilon_0, 0) = \varepsilon_0, \quad \varepsilon(\varepsilon_0, t + \tau) = \varepsilon(\varepsilon(\varepsilon_0, \tau), t), \quad \dim(\varepsilon) = \dim(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\forall \varepsilon_0, U, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s} \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \Delta \tilde{\mathbf{x}}^* \left( \varepsilon(\varepsilon_0, t), U, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s} \right) \right) = \Delta \tilde{\mathbf{x}}^{**} \left( \varepsilon_0, U, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s} \right), \quad (5)$$

$$\text{из } \left( \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \right)_{\text{ext}} \equiv 0 \text{ следует } \hat{\mathbf{s}}^* \left( \varepsilon, U, \mathbf{s}, \mathbf{q}_{\text{упр}} \right) \equiv \hat{\mathbf{s}}^{**} \left( U, \mathbf{s}, \mathbf{q}_{\text{упр}} \right), \quad (6)$$

$$\text{из } U(t) \equiv U = \text{const} \text{ следует } \hat{\mathbf{u}}(t, \hat{\mathbf{u}}) \equiv \hat{\mathbf{u}}(U), \quad (7)$$

где  $\mathbf{x}(t)$  – динамика параметров состояния системы;  $\Delta \mathbf{x}(t)$  – динамика величин, характеризующих независимые параметры состояния (не связанные между собой законами сохранения);  $U(t)$  – динамика характеристик системы, не изменяющихся в результате протекания процессов внутри системы, а изменяющихся только в результате внешних воздействий на нее;  $(d\mathbf{x}(t)/dt)_{\text{ext}}$  – внешние потоки.

Как видно из уравнений (1)–(7), функция  $\tilde{\mathbf{x}}^* \left( \Delta \mathbf{x}, U, \mathbf{q}_{\text{топ}}, \hat{\mathbf{s}}^* \right)$  характеризует топологическую составляющую, функция  $\Delta \tilde{\mathbf{x}}^* \left( \varepsilon, U, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s} \right)$  – диссипативную составляющую, а функции  $\hat{\mathbf{s}}^* \left( \varepsilon, U, \mathbf{s}, \mathbf{q}_{\text{упр}} \right)$  и  $\hat{\mathbf{s}} \left( \varepsilon, U, \mathbf{q}_{\text{упр}} \right)$  – управляющую составляющую системы [7, 9]. Для любого аналитического задания динамики системы в виде (1)–(7) найдется система уравнений ММПЭП, общим решением которого будет (1)–(7) [7]. Отсюда вытекает корректность задания аналитического выражения (1)–(7) общего решения уравнений ММПЭП. Квадратные скобки в выражении (1) означают взятие функционала динамики  $U(t)$ .

Измеряемые  $\mathbf{y}(t)$  и контролируемые  $\mathbf{z}(t)$  параметры системы [6, 7]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}(t, \mathbf{c}_y, \mathbf{p}), \quad \mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}(t, \mathbf{c}_z, \mathbf{p}), \quad \mathbf{c}_y = \mathbf{c}_y[\mathbf{x}(t), U(t)], \quad \mathbf{c}_z = \mathbf{c}_z[\mathbf{x}(t), U(t)], \quad (8)$$

где  $\mathbf{p}$  – индивидуальные параметры системы. Для задания аналитического выражения динамики рассматриваемой системы используется локальное упрощение уравнений ММПЭП [6, 7, 10] с последующим заданием соответствующих упрощенных аналитических выражений динамик  $\mathbf{x}(t)$ , из которых формируется полное общее решение дифференциальных уравнений ММПЭП в виде (1)–(7) [6, 7, 10]. На основе системы уравнений (1)–(8) строится искомая преобразованная модель системы [7].

Общее решение системы дифференциальных уравнений ММПЭП в виде (1)–(7) задается путем интерполяции опорных общих решений уравнений ММПЭП  $\left\{ \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0, t) \right\}_{i=1}^{n_{\text{оп}}}$ , полученных при соответствующих фиксированных значениях  $\mathbf{p}_i$  индивидуальных параметров  $\mathbf{p}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_i$  параметров  $\hat{\mathbf{u}}$ ,  $\mathbf{a}$  параметров  $\mathbf{a}$  функциональных разложений для свойств веществ и процессов [7]:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_x \left( \left\{ \mathbf{x}_i \left( \hat{\varepsilon}_i(t), \hat{\mathbf{u}}_i(t) \right) \right\}_{i=1}^{n_{\text{он}}}, \hat{\mathbf{b}} \right), \quad \varepsilon_0 = \mathbf{F}_x^{-1}(\mathbf{x}_0, \hat{\mathbf{b}}), \quad \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{p}), \quad (9)$$

$$\hat{\varepsilon}_i(t) = \hat{\varepsilon}_i^* \left( \varepsilon(\varepsilon_0, t), \hat{\mathbf{b}} \right), \quad \hat{\mathbf{u}}_i(t) = \hat{\mathbf{u}}_i^* \left( \hat{\mathbf{u}}(t, \hat{\mathbf{u}}_i), \hat{\mathbf{b}} \right), \quad i = \overline{1, n_{\text{он}}}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a}), \quad (10)$$

где опорные динамики  $\left\{ \mathbf{x}_i(\mathbf{x}_0, t) \right\}_{i=1}^{n_{\text{он}}}$  аппроксимируются соответствующими функциями  $\mathbf{x}_i(\hat{\varepsilon}_i(t), \hat{\mathbf{u}}_i(t))$ ,  $i = 1, n_{\text{он}}$ , заданными с учетом (10) в виде уравнений (1)–(7). Функции  $\mathbf{F}_x$ ,  $\hat{\mathbf{b}}$ ,  $\mathbf{b}$  представляют собой выбранные методы интерполяции [7]. Общее решение дифференциальных уравнений ММПЭП, заданное в виде (9), (10), удовлетворяет (1)–(7) [7], а значит, является корректным [7].

С учетом выражений (8)–(10) получим для динамики ИП  $\mathbf{y}(t)$  и КП  $\mathbf{z}(t)$  [7]:

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{g}}_y(\mathbf{x}_0, t, \hat{\mathbf{b}}_y), \quad \hat{\mathbf{b}}_y = \hat{\mathbf{b}}_y \left( \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{u}}), \tilde{\mathbf{b}} \right), \quad \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p}), \quad \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{a}), \quad (11)$$

$$\mathbf{z}(t) = \tilde{\mathbf{g}}_z(\mathbf{x}_0, t, \hat{\mathbf{b}}_z), \quad \hat{\mathbf{b}}_z = \hat{\mathbf{b}}_z \left( \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{u}}), \tilde{\mathbf{b}} \right), \quad (12)$$

где параметры  $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{u}})$ ,  $\hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{a}, \mathbf{p})$  меняются независимо с изменением параметров  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{p}$ . Это дает возможность ввести функционалы  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}_0}$  и  $\tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}}$  для  $\mathbf{x}_0$  и  $\tilde{\mathbf{b}}$  соответственно [7]:

$$\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}_0}(\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_0}), \quad \tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_0} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_0}}[\mathbf{y}_r(t)], \quad \tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}}(\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}}_r), \quad \tilde{\mathbf{b}}_r = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}_r}[\mathbf{y}_r(t)], \quad (13)$$

$$\mathbf{y}_r(t) \equiv \tilde{\mathbf{g}}_y \left( \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}_0}[\mathbf{y}_r(t)], t, \hat{\mathbf{b}}_y \left( \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}}[\mathbf{y}_r(t)], \tilde{\mathbf{b}} \right) \right),$$

где  $\mathbf{y}_r(t)$  – репрезентативный участок динамики ИП  $\mathbf{y}(t)$ . Определив согласно уравнению (13) параметры  $\mathbf{x}_0$  и  $\tilde{\mathbf{b}}$ , из известных из экспериментальных данных репрезентативных участков  $\mathbf{y}_r(t)$  динамик ИП  $\mathbf{y}(t)$ , мы в соответствии с уравнениями (11), (12) определяем индивидуальные параметры  $\hat{\mathbf{p}}$  и параметры функциональных разложений  $\tilde{\mathbf{b}}$  [7]. Затем в силу выражений (11)–(13) мы определим КП [7].

Отсюда на основе выражений (11)–(13) может быть задана функция, определяющая по репрезентативным участкам контрольных динамик ИП  $(\mathbf{y}_{r,i}^{\text{кон}}(t), \hat{\mathbf{u}}_i)$ ,  $i = 1, N_{\text{кон}}$  индивидуальные параметры системы  $\hat{\mathbf{p}}$  ( $N_{\text{кон}}$  – число контрольных динамик рассматриваемой системы) [7, 8]:

$$\hat{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{p}}} \left( \left\{ \tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}}, \hat{\mathbf{u}}_i \right\}_{i=1}^{N_{\text{кон}}}, \tilde{\mathbf{b}} \right), \quad \tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}}}(\hat{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{b}}_{r,i}^{\text{кон}}), \quad \tilde{\mathbf{b}}_{r,i}^{\text{кон}} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}_{r,i}^{\text{кон}}}[\mathbf{y}_{r,i}^{\text{кон}}(t)], \quad i = 1, N_{\text{кон}}. \quad (14)$$

Выражения (9)–(14) представляют собой задание аналитического выражения динамики состояния системы, позволяющее получить динамику в зависимости от параметров контрольных динамик  $\tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}}}(\hat{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{b}}_{r,i}^{\text{кон}})$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_{r,i}^{\text{кон}} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}_{r,i}^{\text{кон}}}[\mathbf{y}_{r,i}^{\text{кон}}(t)]$ ,  $i = 1, N_{\text{кон}}$ . При этом функция  $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}} \left( \left\{ \tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}}, \hat{\mathbf{u}}_i \right\}_{i=1}^{N_{\text{кон}}}, \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}} \right)$  в правой части (11), (12), как и функция  $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}_0}(\hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_0})$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_0} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}_{\mathbf{x}_0}}[\mathbf{y}_r(t)]$ , также может представлять собой выбранный метод интерполяции (видно из работы [7]). С учетом выражений (11)–(14) получим выражения для динамик ИП  $\mathbf{y}(t)$  и КП  $\mathbf{z}(t)$ , аналогичные (11), (12):

$$\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{g}}_y(\mathbf{x}_0, t, \hat{\mathbf{b}}_y), \quad \hat{\mathbf{b}}_y = \hat{\mathbf{b}}_y \left( \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}} \left( \tilde{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{p}}} \left( \left\{ \tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}}, \hat{\mathbf{u}}_i \right\}_{i=1}^{N_{\text{кон}}}, \tilde{\mathbf{b}} \right), \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}} \right) \right), \quad (15)$$

$$\mathbf{z}(t) = \tilde{\mathbf{g}}_z(\mathbf{x}_0, t, \hat{\mathbf{b}}_z), \hat{\mathbf{b}}_z = \hat{\mathbf{b}}_z \left( \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}} \left( \tilde{\mathbf{g}}_p \left( \left\{ \tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}}, \hat{\mathbf{u}}_i \right\}_{i=1}^{N_{\text{кон}}}, \mathbf{b} \right), \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{b}} \right) \right). \quad (16)$$

Входящие в выражения (15), (16) параметры  $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$ ,  $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$  определяются из статистики ИП  $\mathbf{y}_{i,j}^{\text{исп}}(t)$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_{i,j}$ ,  $i=1, N_{\text{исп},j}$ ,  $j=1, n_{\text{экз}}$  испытаний различных экземпляров одного бренда ( $n_{\text{экз}}$  – число испытываемых экземпляров лабораторной системы;  $N_{\text{исп},j}$ ,  $j=1, n_{\text{экз}}$  – число испытаний каждого  $j$ -го испытываемого экземпляра), используя (15), (16), в соответствии с [7, 8]:

$$\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}} \left( \left\{ \left\{ \tilde{\mathbf{b}}_{i,j}^{\text{исп}}, \hat{\mathbf{u}}_{i,j} \right\}_{i=1}^{N_{\text{исп},j}} \right\}_{j=1}^{n_{\text{экз}}} \right), \tilde{\mathbf{b}}_{i,j}^{\text{исп}} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}},j}^{\text{исп}}(\hat{\mathbf{u}}_{i,j}, \tilde{\mathbf{b}}_{r,i,j}^{\text{исп}}), \tilde{\mathbf{b}}_{r,i,j}^{\text{исп}} = \tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}},j}^{\text{исп}}[\mathbf{y}_{r,i,j}^{\text{исп}}(t)],$$

$$i=1, N_{\text{исп},j}, j=1, n_{\text{экз}}. \quad (17)$$

Правая часть полученного выражения (17) может также представлять собой выбранный метод интерполяции [7].

Выражения (15)–(17) представляют собой ММ системы, которая может быть положена в основу МЯ цифровых двойников [7, 8]. Такая ММ получается из статистики испытаний экземпляров системы рассматриваемого бренда, а также из статистики испытаний лабораторных систем. Нетрудно видеть, что для выбора интерполяционных методов, входящих в (15)–(17) для  $\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}} \left( \left\{ \tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}}, \hat{\mathbf{u}}_i \right\}_{i=1}^{N_{\text{кон}}}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{b} \right)$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}_0}$  соответственно, необходимо, выполнив моделирование динамик в системе для совокупностей случайно заданных значений  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{a}$ , получить качественный характер динамик, а также качественный характер связи между параметрами полученных динамик. На основе упомянутого качественного анализа смоделированных динамик системы выбираются опорные динамики, входящие в (9), (10), и выражения для их задания, удовлетворяющие (1)–(7) [7], а также опорные значения параметров динамик системы и выбираются интерполяционные методы  $\tilde{\mathbf{b}}$ ,  $\tilde{\mathbf{b}}$ ,  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathbf{x}_0}$ .

Использование интерполяционных методов (т.е. методов, непосредственно базирующихся на реперных значениях [9]) обусловлено тем, что для построения преобразованной ММ в общем случае необходимо локально упрощать систему уравнений ММПЭП [6, 7, 11]. Коэффициенты локально упрощенной системы уравнений ММПЭП, из которых определяются коэффициенты исходных уравнений ММПЭП, определяются значениями ИП в соответствующей области локального упрощения [6, 7, 11] – идеология методов интерполяции [9]. В силу нелинейности реальных систем полученных областей локальных упрощений уравнений ММПЭП достаточно много [6, 7], что также обуславливает применение методов интерполяции для построения ММ систем, положенных в основу МЯ их цифровых двойников [9].

Функционал  $\tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}}$  может быть построен с помощью различных методов идентификации [12]. Аналогично функционалу  $\tilde{\mathbf{g}}_{\tilde{\mathbf{b}}}$  методами [12] могут быть введены функционалы  $\hat{\mathbf{b}}_y = \tilde{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{b}}_y}[\mathbf{y}(t)]$  и  $\hat{\mathbf{b}}_z = \tilde{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{b}}_z}[\mathbf{z}(t)]$ . С помощью введенных функционалов  $\tilde{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{b}}_y}$  и  $\tilde{\mathbf{g}}_{\hat{\mathbf{b}}_z}$  определяются из результатов вычислительного эксперимента соответствующие параметры  $\hat{\mathbf{b}}_y$  и  $\hat{\mathbf{b}}_z$ , входящие в выражения (15) и (16) соответственно. Из качественного анализа полученных из результатов вычислительного эксперимента параметров  $\hat{\mathbf{b}}_y$  и  $\hat{\mathbf{b}}_z$  и задаются функции для параметров  $\hat{\mathbf{b}}_y$  и  $\hat{\mathbf{b}}_z$  и независимые параметры  $\tilde{\mathbf{b}}$ .

### Построение моделей для математического ядра цифровых двойников

Итак, полученные ММ из уравнений ММПЭП, являющиеся составляющими МЯ цифровых двойников, могут быть двух видов:

- ММ систем, которые строятся из статистики испытаний систем рассматриваемого бренда;
- ММ систем, которые строятся на основе статистики испытаний лабораторных систем.

Рассмотрим первый случай (случай построения ММ систем, которые строятся из статистики испытаний систем рассматриваемого бренда). В рассматриваемом случае на основе уравнения (15) получаем из ИП  $y(t)$  параметры  $\hat{\mathbf{b}}_y$ , а затем из функции для  $\hat{\mathbf{b}}_y$  получаем параметры  $\tilde{\mathbf{b}}$  и  $\bar{\mathbf{b}}$  для каждой динамики ИП  $y(t)$ . Затем в силу одинаковости для всех экземпляров рассматриваемой системы параметров  $\bar{\mathbf{b}}$  берем в качестве значения параметров  $\tilde{\mathbf{b}}$  их среднее арифметическое значений, полученных вышеописанным путем для каждой динамики ИП  $y(t)$ . Затем получаем на основе выражения (14) контрольные параметры  $\tilde{\mathbf{b}}_i^{\text{кон}}$ ,  $i=1, N_{\text{кон}}$ , соответствующие параметрам внешних воздействий  $\hat{\mathbf{u}}_i$ ,  $i=1, N_{\text{кон}}$ , и задаем интерполяционную зависимость для  $\tilde{\mathbf{b}}$  (исходя из (17)), входящую в выражения (15), (16):

$$\tilde{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}} \left( \left\{ \tilde{\mathbf{b}}_k^{\text{кон}}, \hat{\mathbf{u}}_k \right\}_{k=1}^{N_{\text{кон}}}, \hat{\mathbf{u}}, \left\{ \left\{ \tilde{\mathbf{b}}_{i,j}^{\text{реп}}, \hat{\mathbf{u}}_{i,j} \right\}_{i=1}^{N_{\text{реп},j}} \right\}_{j=1}^{n_{\text{экз}}} \right), \quad (18)$$

где аналогично (17):

$$\tilde{\mathbf{b}}_{i,j}^{\text{реп}} = \bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{b},i,j}^{\text{реп}}(\hat{\mathbf{u}}_{i,j}, \tilde{\mathbf{b}}_{r,i,j}^{\text{реп}}), \quad \tilde{\mathbf{b}}_{r,i,j}^{\text{реп}} = \bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{b},r,j}^{\text{реп}}[y_{r,i,j}^{\text{реп}}(t)], \quad i=1, N_{\text{реп},j}, \quad j=1, n_{\text{экз}}, \quad (19)$$

используя значения контрольных параметров  $\tilde{\mathbf{b}}_{r,i,j}^{\text{реп}}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_{i,j}$ ,  $i=1, N_{\text{реп},j}$ ,  $j=1, n_{\text{экз}}$  репрезентативных участков динамик  $y_{r,i,j}^{\text{реп}}(t)$ ,  $i=1, N_{\text{реп},j}$ ,  $j=1, n_{\text{экз}}$ , репрезентативных экземпляров рассматриваемой системы. Также параметры  $\tilde{\mathbf{b}}_{i,j}^{\text{реп}}$ ,  $i=1, N_{\text{реп},j}$ ,  $j=1, n_{\text{экз}}$  могут либо явно входить в уравнение (18), либо явно в уравнение (18) могут входить параметры  $\tilde{\mathbf{b}}$ , которые определяются через  $\tilde{\mathbf{b}}_{r,i,j}^{\text{реп}}$ ,  $\hat{\mathbf{u}}_{i,j}$ ,  $i=1, N_{\text{реп},j}$ ,  $j=1, n_{\text{экз}}$ , используя методы теории идентификации [12]. Второй подход позволяет сглаживать случайные погрешности экспериментальных данных [12, 13]. Общая структура ММ, положенной в основу МЯ цифрового двойника, показана на рис. 3.

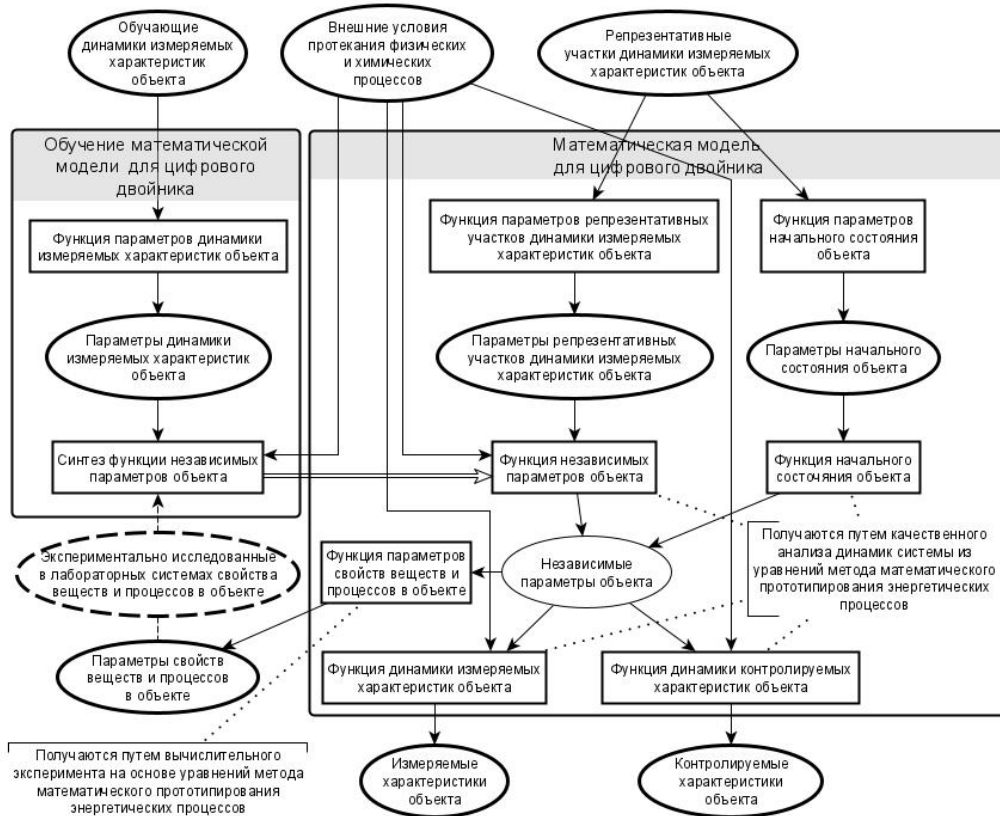


Рис. 3. Модель системы, получаемая на основе статистики испытаний экземпляров рассматриваемой системы с учетом испытаний лабораторных систем

Как нетрудно видеть из выражений (14)–(16), из полученных значений независимых параметров  $\tilde{\mathbf{b}}$  можно определять параметры свойств веществ и процессов (СВП) в системе [7]. Для этого необходимо ввести функцию, определяющую параметры СВП в системе (рис. 3), которая получается также методами интерполяции с использованием вычислительного эксперимента на основе системы уравнений ММПЭП [7]. С использованием упомянутой функции, построив вышеописанным образом ММ для лабораторных систем, мы получим параметры СВП в лабораторной системе. Однако часть этих свойств могут быть справедливыми и для рассматриваемой системы, что делает целесообразным их учет в интерполяционном выражении (18) (рис. 3) [7]. Так реализуется схема построения ММ на основе статистики испытаний лабораторных систем, структура которой также показана на рис. 3.

Функции  $\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{b}}^{\text{кон}}$ , входящие в уравнение (14), а также функции  $\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{b},j}^{\text{реп}}$ ,  $j = 1, n_{\text{экз}}$ , входящие в уравнение (19), могут быть заданы интерполяционными методами, а также с использованием методов наименьших квадратов на основе функций динамик ИП (15) [12]. При этом с использованием интерполяционных методов могут быть заданы приближенные реализации упомянутых функций, результаты вычислений которых доводятся методом наименьших квадратов [12]. Аналогичное касается и вышеупомянутых функций  $\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{b}_y}$  и  $\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{b}_z}$ .

### Результаты

Класс ММ объектов, зашиваемых в основу МЯ цифровых их двойников, структура которых показана на рис. 3, представляет собой развитие статистических методов построения ММ [13]. Упомянутое развитие заключается в том, что класс ММ, в котором ищется ММ [12, 13], заложена реальная физика функционирования объекта, что гарантирует корректность построенной ММ [12, 13]. Таким образом, предложенный подход построения ММ систем вбирает в себя как преимущества подхода черного ящика (простоту), так и преимущества подхода, основанного на моделировании физических и химических процессов в объекте (экстраполируемость модели на режимы, для которых имеется малое число экспериментальных данных) [13].

Благодаря использованию методов интерполяции предложенная схема построения моделей может быть положена в основу алгоритмов машинного обучения, в частности нейронных и гибридных сетей [7]. Пример построения ММ литий-ионного аккумулятора US18650VTC6 Series в соответствии с предложенной схемой приведен в работе [14].

### Обсуждение

Итак, задача построения ММ системы, положенной в основу МЯ цифровых двойников объектов различной физической и химической природы, разбивается на два класса подзадач:

1. Качественный анализ на основе уравнений ММПЭП динамик рассматриваемого объекта и перекрестных связей между параметрами динамик объекта в различных режимах его функционирования и параметрами внешних воздействий на него.
2. Построение ММ системы в сформированном на основе качественного анализа ММПЭП системы классе ММ.

Таким образом, построение искомой ММ в соответствии с предложенной в настоящей работе схемой представляет собой использование известных методов [1–5, 9, 12, 13], примененных к классу ММ, построенного путем качественного анализа на основе ММПЭП рассматриваемого объекта.

### Заключение

Качественный анализ динамики процессов в объектах различной физической и химической природы на основе ММПЭП является важнейшим способом задания класса ММ, в котором строятся ММ объекта известными методами [1–5, 9, 12, 13]. Отсюда вытекает важнейшая задача планирования вычислительного эксперимента на основе ММПЭП с последующим качественным анализом полученных ММПЭП динамик рассматриваемого объекта.

### Список литературы

1. Васильев А. Н., Тархов Д. А., Малыхина Г. Ф. Методы создания цифровых двойников на основе нейросетевого моделирования // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2018. Т. 4, № 3. С. 521–532.



2. Кокорев Д. С., Юрин А. А. Цифровые двойники: понятие, типы и преимущества для бизнеса // *Colloquium-journal*. 2019. № 10 (34). С. 31–35.
3. Гончаров А. С., Саклаков В. М. Цифровой двойник: обзор существующих решений и перспективы развития технологии // *Материалы Всероссийской научно-практической конференции «Информационно-телекоммуникационные системы и технологии (ИТСИТ-2018)»* (г. Кемерово, 11–13 октября 2018 г.). Кемерово, 2018. С. 24–26.
4. Курганова Н. В., Филин М. А., Черняев Д. С. [и др.]. Внедрение цифровых двойников как одно из ключевых направлений цифровизации производства // *International Journal of Open Information Technologies*. 2019. Vol. 7, № 5. С. 105–115.
5. Петров А. В. Имитация как основа технологии цифровых двойников // *Вестник ИрГТУ*. 2018. Т. 22, № 10. С. 56–66. doi: 10.21285/1814-3520-2018-10-56-66
6. Khalyutin S. P., Starostin I. E., Agafonkina I. V. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development // *Energies*. 2023. Vol. 16. P. 1933–1958. doi: 10.3390/en16041933
7. Старостин И. Е. Построение на основе интерполяции моделей различных физических и химических систем методом математического прототипирования энергетических процессов // *Надежность и качество сложных систем*. 2024. № 1 (45). С. 49–59. doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-6
8. Старостин И. Е., Дружинин А. А., Гавриленков С. И. Использование машинного обучения с учителем для построения математических моделей систем методом математического прототипирования энергетических процессов // *Труды Международного симпозиума Надежность и качество*. 2023. Т. 1. С. 66–72.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
10. Шапиро С. В. Основы синергетики. Уфа : УГАЭС, 2012. 200 с.
11. Ланцов В. Н. Методы понижения порядка моделей сложных систем. Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. 84 с.
12. Eukhoff P. *Systems identification: parameters and state estimation*. Eindhoven, Netherlands : University of technology, 1975. 680 p.
13. Антонов А. В. Системный анализ. М. : Высш. шк., 2004. 454 с.
14. Starostin I. E., Khalyutin S. P., Davidov A. O. [et al.]. Obtaining a model for the voltage and temperature of the US18650VTC6 Series lithium-ion battery in constant current discharge mode from the analysis of physical and chemical processes in the accumulator // 18th technical scientific conference on aviation dedicated to the memory of N.E. Zhukovsky, TSCZH 2021. 2021. P. 109–117.

### References

1. Vasil'ev A.N., Tarkhov D.A., Malykhina G.F. Methods of creating digital twins based on neural network modeling. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie = Modern information technologies and IT education*. 2018;4(3):521–532. (In Russ.)
2. Kokorev D.S., Yurin A.A. Digital twins: concept, types and advantages for business. *Colloquium-journal*. 2019;(10):31–35. (In Russ.)
3. Goncharov A.S., Saklakov V.M. Digital twin: an overview of existing solutions and prospects for technology development. *Materialy Vserossiyskoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Informatsionno-telekommunikatsionnye sistemy i tekhnologii (ITSIT-2018)»* (g. Kemerovo, 11–13 oktyabrya 2018 g.) = *Materials of the All-Russian scientific and practical conference "Information and telecommunication systems and technologies (ITSIT-2018)"* (Kemerovo, October 11-13, 2018). Kemerovo, 2018:24–26. (In Russ.)
4. Kurganova N.V., Filin M.A., Chernyaev D.S. et al. The introduction of digital twins as one of the key directions of digitalization of production. *International Journal of Open Information Technologies*. 2019;7(5):105–115. (In Russ.)
5. Petrov A.V. Imitation as the basis of digital twins technology. *Vestnik IrGTU = Bulletin of IrSTU*. 2018;22(10):56–66. (In Russ.). doi: 10.21285/1814-3520-2018-10-56-66
6. Khalyutin S.P., Starostin I.E., Agafonkina I.V. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development. *Energies*. 2023;16:1933–1958. doi: 10.3390/en16041933
7. Starostin I.E. Construction on the basis of interpolation of models of various physical and chemical systems by the method of mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2024;(1):49–59. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-6
8. Starostin I.E., Druzhinin A.A., Gavrilencov S.I. Using machine learning with a teacher to build mathematical models of systems by mathematical prototyping of energy processes. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo = Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality*. 2023;1:66–72. (In Russ.)
9. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody = Numerical methods*. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011:592. (In Russ.)
10. Shapiro S.V. *Osnovy sinergetiki = Fundamentals of synergetics*. Ufa: UGAES, 2012:200. (In Russ.)
11. Lantsov V.N. *Metody ponizheniya poryadka modeley slozhnykh system = Methods of lowering the order of models of complex systems*. Vladimir: Izd-vo VIGU, 2017:84. (In Russ.)

12. Eykhoff P. *Systems identification: parameters and state estimation*. Eindhoven, Netherlands: University of technology, 1975:680.
13. Antonov A.V. *Sistemnyy analiz = System analysis*. Moscow: Vyssh. shk., 2004:454. (In Russ.)
14. Starostin I.E., Khalyutin S.P., Davidov A.O. et al. Obtaining a model for the voltage and temperature of the US18650VTC6 Series lithiumion battery in constant current discharge mode from the analysis of physical and chemical processes in the accumulator. *18th technical scientific conference on aviation dedicated to the memory of N.E. Zhukovsky, TSCZH 2021*. 2021:109–117.

**Информация об авторах / Information about the authors**

**Игорь Евгеньевич Старостин**

доктор технических наук, профессор,  
профессор кафедры электротехники  
и авиационного электрооборудования,  
Московский государственный технический  
университет гражданской авиации  
(Россия, г. Москва, Кронштадтский бульвар, 20)  
E-mail: starostinigo@yandex.ru

**Igor E. Starostin**

Doctor of technical sciences, professor, professor  
of the sub-department of electrical engineering  
and aviation electrical equipment,  
Moscow State Technical University of Civil Aviation  
(20 Kronshtadtskiy boulevard, Moscow, Russia)

**Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов /**

**The author declares no conflicts of interests.**

**Поступила в редакцию/Received 15.05.2024**

**Поступила после рецензирования/Revised 15.07.2024**

**Принята к публикации/Accepted 25.08.2024**