УДК 519.622.2
doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-6

ПОСТРОЕНИЕ НА ОСНОВЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ МОДЕЛЕЙ РАЗЛИЧНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ И ХИМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОТОТИПИРОВАНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

И. Е. Старостин

Московский государственный технический университет гражданской авиации, Москва, Россия
starostinigo@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Решение практических задач (проектирования и эксплуатации систем) подразумевает построение математических моделей систем. Для математического моделирования систем различной физической и химической природы авторами был предложен метод математического прототипирования энергетических процессов, основывающийся на современной неравновесной термодинамике, механике и электродинамике. Упомянутый метод дает адекватные модели систем, т.е. не противоречащие общим физическим законам, а также особенностям протекания процессов в конкретной системе. Однако для определения контролируемых параметров системы по ее измеряемым параметрам из системы дифференциальных уравнений, полученных методом математического прототипирования, необходимо решать очень трудоемкую задачу идентификации большого числа параметров этих уравнений. Одним из путей борьбы с трудоемкостью упомянутых задач идентификации является использование интерполяционных методов, что обусловливает актуальность задачи разработки методики построения моделей систем методом математического прототипирования энергетических процессов с использованием интерполяционных методов. *Материалы и методы.* Для синтеза уравнений динамики физических и химических процессов используется метод математического прототипирования энергетических процессов. С целью упрощения идентификации параметров уравнений, получаемых методом математического прототипирования, используются специальные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений, сводящих интегрирование дифференциальных уравнений к решению алгебраических уравнений. С целью упрощения решения полученных алгебраических уравнений используются методы интерполяции. Для определения постоянных коэффициентов полученной модели из экспериментальных данных используются методы теории идентификации. *Результаты.* Построенная предложенными в настоящей статье методами модель системы является корректной, т.е. не противоречит общефизическим законам и вбирает в себя особенности протекания процессов в конкретной системе. Также обучение модели поблочное и может быть сведено к линейной идентификации, что дает возможность обрабатывать экспериментальные данные по мере их поступления. *Выводы.* Предложенная архитектура преобразованных моделей систем позволяет использовать полученные модели в составе математического ядра цифровых двойников. Особенности архитектуры предложенных моделей дают возможность их пассивной идентификации.

Ключевые слова: метод математического прототипирования энергетических процессов, цифровые двойники, интерполяция, линейная идентификация, машинное обучение

Для цитирования: Старостин И. Е. Построение на основе интерполяции моделей различных физических и химических систем методом математического прототипирования энергетических процессов // Надежность и качество сложных систем. 2024. № 1. С. 49–58. doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-6

BUILDING, BASED ON INTERPOLATION, MODELS OF VARIOUS PHYSICAL AND CHEMICAL SYSTEMS BY METHOD OF MATHEMATICAL PROTOTYPING OF ENERGY PROCESSES

I.E. Starostin

Moscow State Technical University of Civil Aviation, Moscow, Russia
starostinigo@yandex.ru

Abstract. *Background.* Solving practical problems (design and operation of systems) implies the construction of mathematical models of systems. For mathematical modeling of systems of various physical and chemical natures, the authors proposed a method of mathematical prototyping of energy processes, based on modern nonequilibrium thermodynamics, mechanics and electrodynamics. The mentioned method provides adequate models of systems, i.e. that do not contradict general physical laws, as well as the peculiarities of processes in a particular system. However, to determine the controlled parameters of a system from its measured parameters from a system of differential equations obtained by the method of mathematical prototyping, it is necessary to solve the very labor-intensive task of identifying a large number of parameters of these equations. One of the ways to combat the complexity of the mentioned identification problems is the use of interpolation methods, which determines the relevance of the task of developing a methodology for constructing system models by mathematical prototyping of energy processes using interpolation methods. *Materials and methods.* To synthesize equations for the dynamics of physical and chemical processes, the method of mathematical prototyping of energy processes is used. In order to simplify the identification of the parameters of equations obtained by the method of mathematical prototyping, special methods for integrating systems of differential equations are used, reducing the integration of differential equations to solving algebraic equations. In order to simplify the solution of the resulting algebraic equations, interpolation methods are used. To determine the constant coefficients of the resulting model from experimental data, methods of identification theory are used. *Results.* The system model constructed by the methods proposed in this article is correct, i.e. does not contradict general physical laws and incorporates the peculiarities of the processes in a particular system. Also, model training is block-by-block and can be reduced to linear identification, which makes it possible to process experimental data as it arrives. *Conclusions.* The proposed architecture of transformed system models makes it possible to use the resulting models as part of the mathematical core of digital twins. The architectural features of the proposed models make it possible to passively identify them.

Keywords: method of mathematical prototyping of energy processes, digital twins, interpolation, linear identification, machine learning

For citation: Starostin I.E. Building, based on interpolation, models of various physical and chemical systems by method of mathematical prototyping of energy processes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2024;(1):49–58. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2024-1-6

Введение

Для построения математических моделей (ММ), предназначенных для решения практических задач (ПЗ) проектирования и эксплуатации различных систем [1–4], авторами был предложен в рамках современной неравновесной термодинамики, механики и электродинамики метод математического прототипирования энергетических процессов (ММПЭП) [5]. Построенные ММПЭП модели динамики процессов различной физической и химической природы не противоречат общим законам физики (законам сохранения, началам термодинамики, и т.д.), а также физическим особенностям конкретной системы [5, 6].

Для определения в соответствии с дифференциальными уравнениями (ДУ) динамики системы, полученных ММПЭП, контролируемых параметров (КП) системы по ее измеряемым параметрам

(ИП) необходимо идентифицировать большое число постоянных параметров, входящих в эти ДУ [5, 6], что представляет собой трудоемкую задачу [5–7]. Одним из путей борьбы с такой трудоемкостью является использование специальных методов интегрирования систем ДУ [8], позволяющих свести задачу к решению алгебраических уравнений [8] наряду с локальным упрощением ДУ [6, 8, 9]. Для снижения трудоемкости (в общем случае большой [8]) решения алгебраических уравнений могут быть применены методы интерполяции [8].

Настоящая работа посвящена построению ММ систем, применимых для решения упомянутых ПЗ [1–4], на базе методов ММПЭП [5, 6, 10] и методов интерполяции [8] и идентификации [7].

Материалы и методы

В соответствие с ММПЭП состояние системы характеризуется независимо от ее предыстории параметрами состояния (ПС), изменяющимися в результате протекания физических и химических процессов в ней [5, 6]. Причиной протекания процессов в системе являются динамические силы, определяемые через частные производные свободной энергии по ПС, расходуемой на протекание процессов в системе [5, 6]. Динамические силы и кинетические свойства однозначно определяют протекание процессов в системе [5, 6]. Динамика ПС в системе в свою очередь определяет динамику ИП и КП (рис. 1) [5, 6]. Приведенные на рис. 1 факторы определяют общую структуру ДУ динамики процессов, а также динамики ИП и КП, получаемых ММПЭП [5, 6].

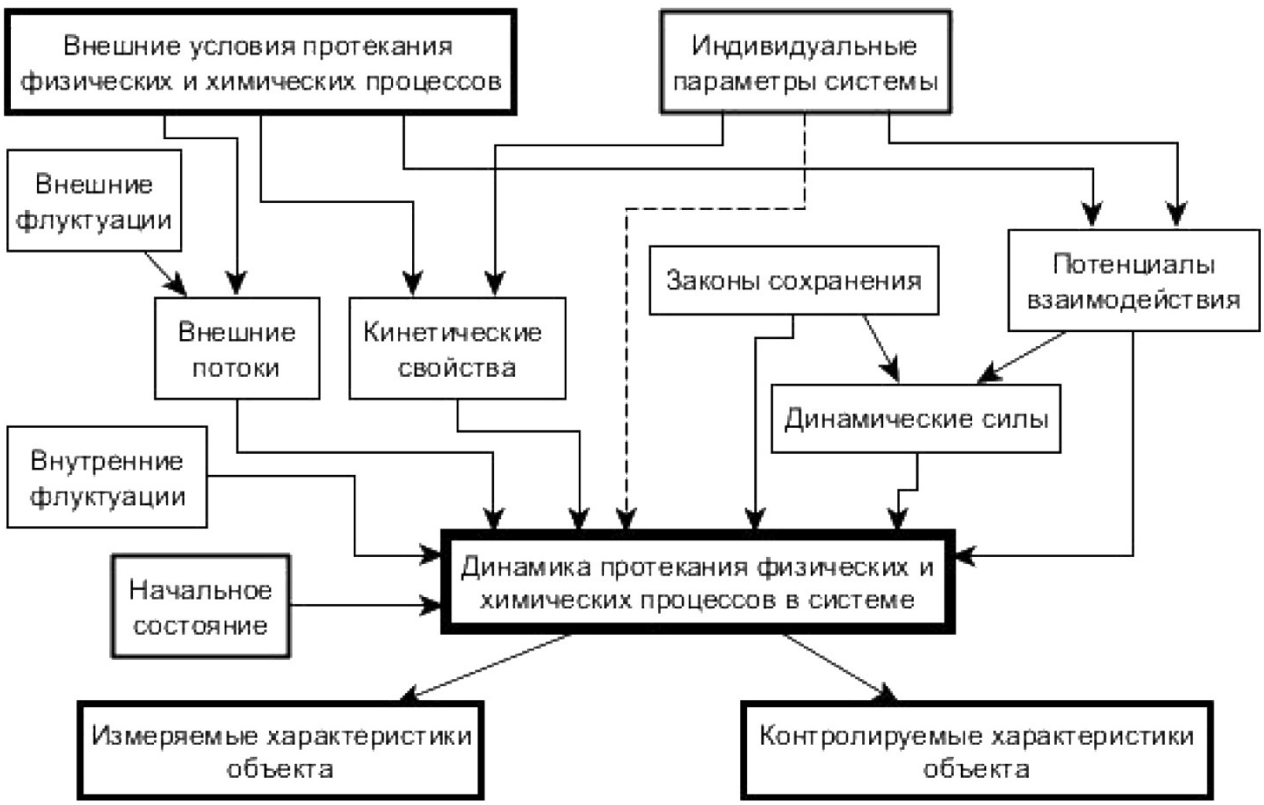

Рис. 1. Факторы, определяющие динамику физических и химических процессов

В общем случае модель объекта (рис. 2) представляет собой алгоритм определения из ИП измеряемых характеристик объекта начального состояния и индивидуальных параметров системы с последующим определением КП системы (с учетом внешних условий протекания процессов) (видно из рис. 1) [5, 7]. Следует отметить, что в КП системы могут войти и ее ИП в последующие моменты времени, а также ее ИП, измерение которых в процессе эксплуатации осуществить невозможно. Для получения модели системы, пригодной для решения ПЗ (рис. 2), необходимо получить из уравнений ММПЭП аналитическое выражение динамики состояния системы, а также функции для определения ее начального состояния и ее индивидуальных параметров [10].

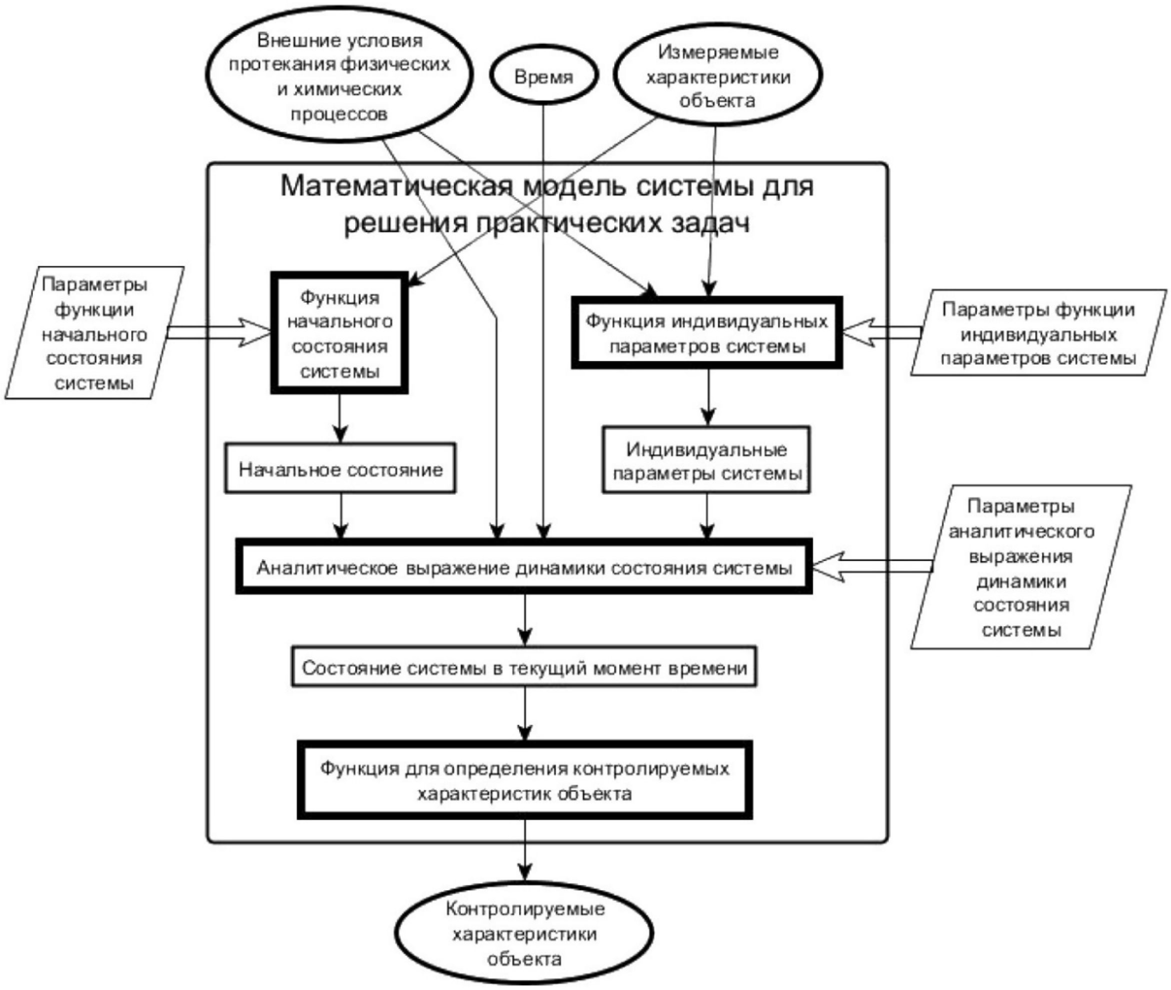

Рис. 2. Математическая модель системы для решения практических задач.
В параллелограммах приведены обучаемые параметры модели

Аналитическое выражение общего решения системы уравнений ММПЭП задается в виде [6]

$$\Delta \mathbf{x}(t) = \Delta \tilde{\mathbf{x}}^{*}\left(\epsilon(\epsilon_0, t), \hat{\tilde{\mathbf{u}}}(t, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \bar{\hat{\mathbf{s}}}(t)\right),\ \hat{\mathbf{u}} = \hat{\tilde{\mathbf{u}}}\left[\mathrm{U}(t)\right], \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}^{*}\left(\Delta \mathbf{x}(t), \hat{\tilde{\mathbf{u}}}(t, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{q}_{\text{топ}}, \hat{\tilde{\mathbf{s}}}^{*}\left(\epsilon(\epsilon_0, t), \hat{\tilde{\mathbf{u}}}(t, \hat{\mathbf{u}}), \bar{\hat{\mathbf{s}}}(t), \mathbf{q}_{\text{упр}}\right)\right), \quad (2)$$

$$\bar{\hat{\mathbf{s}}}(t) = \hat{\tilde{\mathbf{s}}}\left(\epsilon(\epsilon_0, t), \hat{\tilde{\mathbf{u}}}(t, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{q}_{\text{упр}}\right),\ \epsilon_0 = \tilde{\mathbf{x}}^{*-1}\left(\mathbf{x}_0, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}(0, \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{q}_{\text{топ}}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\right), \quad (3)$$

где [6, 9]:

$$\epsilon(\epsilon_0, 0) = \epsilon_0,\ \epsilon(\epsilon_0, t+\tau) = \epsilon\left(\epsilon(\epsilon_0, \tau), t\right),\ \dim(\epsilon) = \dim(\mathbf{x}), \quad (4)$$

$$\forall \epsilon_0, \mathrm{U}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\, \exists \lim_{t \to +\infty}\left(\Delta \tilde{\mathbf{x}}^{*}\left(\epsilon(\epsilon_0, t), \mathrm{U}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\right)\right) = \Delta \tilde{\mathbf{x}}^{**}\left(\epsilon_0, \mathrm{U}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\right), \quad (5)$$

$$\text{из } \left(\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}\right)_{ext} \equiv 0 \text{ следует } \hat{\tilde{\mathbf{s}}}^{*}\left(\epsilon, \mathrm{U}, \mathbf{s}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\right) \equiv \hat{\tilde{\mathbf{s}}}^{**}\left(\mathrm{U}, \mathbf{s}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\right), \quad (6)$$

$$\text{из } \mathbf{U}(t) \equiv \mathbf{U} = \text{const} \text{ следует } \hat{\tilde{\mathbf{u}}}(t, \hat{\mathbf{u}}) \equiv \hat{\tilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{U}), \quad (7)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – динамика ПС системы; $\Delta \mathbf{x}(t)$ – динамика величин, характеризующих независимые ПС (не связанные законами сохранения с параметрами баланса [6]); $\mathbf{U}(t)$ – динамика характеристик системы, не изменяющихся в результате протекания процессов внутри нее, а изменяющихся только в результате внешних воздействий на систему; $\left(d\mathbf{x}(t)/dt\right)_{ext}$ – внешние потоки. Как видно из (1)–(7), функции $\tilde{\mathbf{x}}^*\left(\Delta\mathbf{x}, \mathrm{U}, \mathbf{q}_{\text{топ}}, \hat{\hat{\mathbf{s}}}^*\right)$ и $\Delta\tilde{\mathbf{x}}^*\left(\epsilon, \mathrm{U}, \mathbf{q}_{\text{дисс}}, \mathbf{s}\right)$ характеризуют топологическую и диссипативную составляющие системы соответственно [6], а функции $\hat{\hat{\mathbf{s}}}^*\left(\epsilon, \mathrm{U}, \mathbf{s}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\right)$ и $\hat{\hat{\mathbf{s}}}\left(\epsilon, \mathrm{U}, \mathbf{q}_{\text{упр}}\right)$ – ее управляющую составляющую [6]. Для любого задания динамики ПС в виде (1)–(7) найдется система уравнений ММПЭП, общим решением которого будет эта динамика [6]. Отсюда (1)–(7) является способом задания динамики системы, альтернативным уравнениям ММПЭП. Квадратные скобки в уравнении (1) означают взятие функционала от $\mathbf{U}(t)$.

Измеряемые $\mathbf{y}(t)$ и контролируемые $\mathbf{z}(t)$ параметры системы [6]:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}\left[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t)\right],\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{Z}\left[t, \mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t)\right]. \tag{8}$$

Для преобразования системы уравнений ММПЭП к виду, пригодному для решения ПЗ, используется локальное упрощение этих ДУ с последующим заданием соответствующих упрощенных аналитических выражений динамик $\mathbf{x}(t)$ в виде (1)–(7), из которых формируется полное решение [5, 6, 9, 11, 12].

Локальные упрощения системы уравнений ММПЭП осуществляются путем локальных упрощений функций состояния (ФС) для свойств веществ и процессов (СВП) с сохранением соответствующих ограничений на упрощенные ФС [5, 6]. Благодаря этому упрощенные уравнения ММПЭП также не противоречат законам физики [5, 6]. Запишем уравнения ММПЭП в виде [11]

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{w}\left(\mathbf{x}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}, \mathbf{a}\right)\right), \tag{9}$$

где $\mathbf{p}$ – индивидуальные параметры системы; $\mathbf{a}$ – параметры ФС (задаваемых в виде функциональных разложений) для СВП [6, 10, 11]. При этом зависимость правой части (9) к $\mathbf{w}$ меньше, чем к $\mathbf{x}$, U, $\mathbf{p}$, $\mathbf{a}$ [9, 11]. Это дает возможность представить (9) в итерационном виде [11]:

$$\frac{d\mathbf{x}_{k+1,r}(t)}{dt} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_{k+1,r}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}, \mathbf{a}, \mathbf{w}_{k,r}(t)\right),\ \mathbf{w}_{k,r}(t) = \mathbf{w}\left(\mathbf{x}_{k,r}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{p}, \mathbf{a}\right),$$

$$\mathbf{x}_{k,r} \in \mathbf{X}_r \tag{10}$$

или в эквивалентном виде [11]:

$$\mathbf{x}_{k+1,r}(t) = \mathbf{x}^*\left(\mathbf{x}_{0,r}, t, \hat{\mathbf{u}}_r, \mathbf{q}, \hat{\mathbf{w}}_{k,r}\right),\ \hat{\mathbf{w}}_{k,r} = \hat{\bar{\mathbf{w}}}_r\left[\mathbf{w}_{k,r}(t)\right],\ \hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\bar{\mathbf{u}}}_r\left[\mathbf{U}(t)\right],$$

$$\mathbf{w}_{k,r}(t) = \mathbf{w}\left(\mathbf{x}_{k,r}(t), \mathrm{U}(t), \mathbf{q}\right),\ t \in \left[t_r, t_{r+1}\right],\ \mathbf{x}_{0,r} = \mathbf{x}(t_r), \tag{11}$$

где $\mathbf{X}_r$ – области локального упрощения (9). Правая часть (11) получается из (10) [11, 12]. Упрощения (10) могут быть такими, что система (9) при фиксированных $\mathbf{w}_{k,r}$ может распасться на независимые друг от друга подсистемы уравнений [11, 12]. При выборе достаточно малых областей $\mathbf{X}_r$ итерации (10) равномерно приближаются к искомой динамике $\mathbf{x}(t)$ [11] (один из специальных методов интегрирования систем ДУ [8]). Критерием остановки итераций (11) является заданная близость $\mathbf{x}_{k,r}(t)$ к $\mathbf{x}(t)$ из класса динамик (1)–(7), включающих в себя всю физику рассматриваемой системы [6, 10]. Это обеспечивает корректность модели системы, показанной на рис. 2 [10].

Синтез итераций построения преобразованной модели системы

Итерации (11) могут быть получены из уравнения (10) либо аналитически (в случае достаточно простой системы (10) [8]), либо с использованием специальных методов интегрирования систем ДУ [8].

В соответствии со специальными методами интегрирования систем ДУ динамика ПС $\mathbf{x}(t)$ рассматриваемой системы задается через опорные динамики $\mathbf{x}_{k,r,i}\left(\epsilon(\epsilon_0,t),\hat{\hat{\mathbf{u}}}_r\left(t,\hat{\mathbf{u}}_{r,i}\right)\right)$, $i=\overline{1,n_{on}}$ ПС $\mathbf{x}(t)$, полученные из уравнения (10) для соответствующих значений $\left\{\left(\hat{\mathbf{u}}_{r,i},\mathbf{p}_i,\mathbf{a}_i,\hat{\mathbf{w}}_{k,r,i}\right)\right\}_{i=1}^{n_{on}}$ в виде (1)–(7), в соответствии с работой [8]:

$$\mathbf{x}_{k,r}\left(\mathbf{x}_{0,r},t\right)=\mathbf{F}_{\mathbf{x},k,r}\left(\left\{\left(\mathbf{x}_{k,r,i}\left(\hat{\hat{\epsilon}}_{k,r,i}(t),\hat{\hat{\mathbf{u}}}_{r,i}(t)\right),\mathbf{c}_{k,r,i}\right)\right\}_{i=1}^{n_{on}},\hat{\mathbf{u}}_r,\mathbf{p},\hat{\mathbf{w}}_{k,r},\mathbf{b}_{k,r}\right), \tag{12}$$

$$\hat{\hat{\epsilon}}_{k,r,i}(t)=\hat{\epsilon}^*_{k,r,i}\left(\epsilon(\epsilon_0,t),\mathbf{c}_{k,r,i},\hat{\mathbf{u}}_r,\mathbf{p},\hat{\mathbf{w}}_{k,r},\mathbf{b}_{k,r}\right),\ i=\overline{1,n_{on}}, \tag{13}$$

$$\hat{\hat{\mathbf{u}}}_{r,i}(t)=\hat{\hat{\mathbf{u}}}^*_{r,i}\left(\hat{\hat{\mathbf{u}}}_r\left(t,\hat{\mathbf{u}}_{r,i}\right),\mathbf{c}_{k,r,i},\hat{\mathbf{u}}_r,\mathbf{p},\hat{\mathbf{w}}_{k,r},\mathbf{b}_{k,r}\right),\ i=\overline{1,n_{on}}, \tag{14}$$

$$\epsilon_0=\mathbf{F}^{-1}_{\mathbf{x},k,r}\left(\mathbf{x}_0,\left\{\mathbf{c}_{k,r,i}\right\}_{i=1}^{n_{on}},\hat{\mathbf{u}}_r,\mathbf{p},\hat{\mathbf{w}}_{k,r},\mathbf{b}_{k,r}\right), \tag{15}$$

где постоянные коэффициенты $\mathbf{c}_{k,r,i}=\left(\hat{\mathbf{u}}_{r,i},\mathbf{p}_i,\mathbf{a}_i,\hat{\mathbf{w}}_{k,r,i}\right)$, $i=\overline{1,n_{on}}$, $\mathbf{b}_{k,r}=\mathbf{b}_{k,r}(\mathbf{a})$; функция $\mathbf{F}_{\mathbf{x},k,r}\left(\left\{\left(\mathbf{x}_{k,r,i},\mathbf{c}_{k,r,i}\right)\right\}_{i=1}^{n_{on}},\hat{\mathbf{u}}_r,\mathbf{p},\hat{\mathbf{w}}_{k,r},\mathbf{b}_{k,r}\right)$ – непрерывна и ограничена; функции $\hat{\epsilon}^*_{k,r,i}\left(\epsilon,\mathbf{c}_{k,r,i},\hat{\mathbf{u}}_r,\mathbf{p},\hat{\mathbf{w}}_{k,r},\mathbf{b}_{k,r}\right)$, $i=\overline{1,n_{on}}$ таковы, что функции

$$\left\{\mathbf{x}_{k,r,i}\left(\hat{\epsilon}^*_{k,r,i}\left(\epsilon(\epsilon_0,t),\hat{\mathbf{c}}_{k,r,i}\right),\hat{\hat{\mathbf{u}}}^*_{r,i}\left(\hat{\hat{\mathbf{u}}}_r\left(t,\hat{\mathbf{u}}_{r,i}\right),\hat{\mathbf{c}}_{k,r,i}\right)\right)\right\}_{i=1}^{n_{on}},$$

$$\hat{\mathbf{c}}_{k,r,i}=\left(\mathbf{c}_{k,r,i},\hat{\mathbf{u}}_r,\mathbf{p},\hat{\mathbf{w}}_{k,r},\mathbf{b}_{k,r}\right),\ i=\overline{1,n_{on}}$$

с учетом (13) представимы в виде (1)–(6), а функции $\hat{\hat{\mathbf{u}}}_r\left(t,\hat{\mathbf{u}}_r\right)$ удовлетворяют выражению (7). В таком случае нетрудно видеть, что итерации (11), полученные в силу (12)–(15), также удовлетворяют (1)–(7). Опорными динамиками $\mathbf{x}_{k,r,i}\left(\epsilon(\epsilon_0,t),\hat{\hat{\mathbf{u}}}_r\left(t,\hat{\mathbf{u}}_{r,i}\right)\right)$, $i=\overline{1,n_{on}}$ могут быть общие аналитические решения еще более локально упрощенной системы ДУ (10), качественное поведение которых такое же, как и качественное поведение общего решения системы ДУ (10). Отсюда упомянутые итерации (11)–(15) равномерно сходятся к общему решению некоторой системы ДУ, полученной ММПЭП, при любой непрерывной ограниченной функции $\mathbf{F}_{\mathbf{x},k,r}\left(\left\{\left(\mathbf{x}_{k,r,i},\mathbf{c}_{k,r,i}\right)\right\}_{i=1}^{n_{on}},\hat{\mathbf{u}}_r,\mathbf{p},\hat{\mathbf{w}}_{k,r},\mathbf{b}_{k,r}\right)$, а значит, являются корректными [6]. Это дает возможность выбора структуры упомянутой интерполяционной функции (с точностью до исследуемых экспериментально входящих в уравнения (12)–(15) коэффициентов $\mathbf{b}_{k,r}=\mathbf{b}_{k,r}(\mathbf{a})$) [8].

Правые части (12)–(15) получаются из моделирования динамик на основе уравнений ММПЭП при различных значениях параметров $\hat{\mathbf{u}}_r$, $\mathbf{p}$, $\hat{\mathbf{w}}_{k,r}$ [10, 13]. Правые части (13) и (14) при этом определяются таким образом, чтобы особые точки опорных динамик совпадали с особыми точками динамики $\mathbf{x}_{k,r}\left(\mathbf{x}_{0,r},t\right)$, соответствующей $\hat{\mathbf{u}}_r$, $\mathbf{p}$, $\hat{\mathbf{w}}_{k,r}$ (так как особые точки упомянутых динамик обусловливаются диссипативной и управляющей составляющими (видно из работы [6])). Это дает возможность задавать правые части (13) и (14) также в виде интерполяционных функций [8]. Что в свою очередь дает возможность одновременного синтеза правых частей (12)–(14) на динамиках, полученных ММПЭП, причем определяемые параметры входят в уравнения (12)–(14) линейно [8], что существенно упрощает синтез правых частей уравнений (12)–(14) [7].

Структура и опорные динамики правых частей уравнений (12)–(14) выбираются на основе качественного анализа динамик ПС $\mathbf{x}(t)$ системы, получаемых из уравнений ММПЭП. В качестве интерполяционных функций, через которые задаются правые части уравнений (12)–(14), может быть взята интерполяция сплайнами [8], интерполяционный полином Лагранжа [8], нейронные сети как универсальный интерполятор [14, 15], а также используя вейвлеты [16].

Идентификация преобразованной модели

В общем случае динамики ИП $\mathbf{y}(t)$ (8) являются динамиками медленно меняющихся составляющих динамик $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ некоторых характеристик рассматриваемой системы [17]:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(t)),\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{Y}\left[t, \tilde{\mathbf{y}}(t)\right], \tag{16}$$

причем динамика $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ полностью восстанавливается по динамике $\mathbf{y}(t)$ [17]:

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \hat{\mathbf{Y}}\left[t, \mathbf{y}(t)\right]. \tag{17}$$

Приведенный подход обусловливается ограниченной пропускной способностью измерительных датчиков [17]. Из уравнения (16) видно, что, выбрав $\tilde{\mathbf{y}}$ в качестве части параметров состояния $\mathbf{x}$, мы, доведя итерации (11)–(15) до полной модели

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}\left(\left\{\left(\mathbf{x}_i\left(\hat{\hat{\epsilon}}_i(t), \hat{\hat{\mathbf{u}}}_i(t)\right), \mathbf{c}_i\right)\right\}_{i=1}^{n_{on}}, \hat{\mathbf{b}}\right),\ \epsilon_0 = \mathbf{F}_{\mathbf{x}}^{-1}\left(\mathbf{x}_0, \{\mathbf{c}_i\}_{i=1}^{n_{on}}, \hat{\mathbf{b}}\right), \tag{18}$$

$$\hat{\hat{\epsilon}}_i(t) = \hat{\epsilon}_i^*\left(\epsilon(\epsilon_0, t), \mathbf{c}_i, \hat{\mathbf{b}}\right),\ \hat{\hat{\mathbf{u}}}_i(t) = \hat{\hat{\mathbf{u}}}_i^*\left(\hat{\mathbf{u}}(t, \hat{\mathbf{u}}_i), \mathbf{c}_i, \hat{\mathbf{b}}\right),\ i = \overline{1, n_{on}}, \tag{19}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{p}),\ \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{a}), \tag{20}$$

представимой в виде (1)–(7), можем вышеописанным путем обучение модели (18)–(20) свести к обучению (по данным $\tilde{\mathbf{y}}(t)$) правых частей (18), (19).

Далее на основе полученных коэффициентов $\hat{\mathbf{b}}$ мы определяем, используя (20), значения параметров $\mathbf{b}$, $\hat{\mathbf{u}}$, $\mathbf{p}$, на основе которых в силу (1)–(8) определяются КП $\mathbf{z}(t)$. Пусть имеется для некоторой совокупности экземпляров рассматриваемой системы некоторого бренда множество данных ИП $\left\{\left\{\left(\hat{\mathbf{u}}_{i,j}, \tilde{\mathbf{y}}_{i,j}(t)\right)\right\}_{j=1}^{N_i}\right\}_{i=1}^{n_{экз}}$, для каждой совокупности $\tilde{\mathbf{y}}_{i,j}(t)$, $j = \overline{1, N_i}$, $i = 1, n_{экз}$ из них описанным выше путем определим соответствующие $\hat{\mathbf{b}}_{i,j}$, $\epsilon_{0,i,j}$, $j = \overline{1, N_i}$, $i = 1, n_{экз}$. Здесь $n_{экз}$ – число экземпляров системы рассматриваемого бренда, а N_i, $i = 1, n_{экз}$ – число испытаний для каждого экземпляра. Затем значения параметров $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}_i$, $i = 1, n_{экз}$ с использованием (20) определим из работы [10]:

$$\hat{\mathbf{b}}_{i,j} = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{u}}_{i,j}, \mathbf{p}_i),\ j = \overline{1, N_i},\ i = 1, n_{экз}, \tag{21}$$

получив при этом из уравнения (21) функционалы для $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}_i$, $i = 1, n_{экз}$ [10]:

$$\mathbf{b} = \breve{\mathbf{b}}\left(\left\{\left\{\left(\hat{\mathbf{u}}_{i,j}, \hat{\mathbf{b}}_{i,j}\right)\right\}_{j=1}^{N_i}\right\}_{i=1}^{n_{экз}}\right),\ \hat{\mathbf{b}}_{i,j} = \hat{\hat{\mathbf{b}}}\left[\tilde{\mathbf{y}}_{i,j}(t)\right],\ j = \overline{1, N_i},\ i = 1, n_{экз}, \tag{22}$$

$$\mathbf{p}_i = \breve{\mathbf{p}}\left(\mathbf{b}, \left\{\hat{\mathbf{u}}_{i,j}, \hat{\mathbf{b}}_{i,j}\right\}_{j=1}^{N_i}\right),\ \hat{\mathbf{b}}_{i,j} = \hat{\hat{\mathbf{b}}}\left[\tilde{\mathbf{y}}_{i,j}(t)\right],\ j = \overline{1, N_i},\ i = 1, n_{экз}, \tag{23}$$

где функционал $\hat{\hat{\mathbf{b}}}$ представляет собой вышеописанный алгоритм определения параметров $\hat{\mathbf{b}}$, входящих в уравнения (18) и (19), из динамики $\tilde{\mathbf{y}}(t)$. Функции (22) и (23) могут быть получены путем аналитического либо численно-аналитического (с использованием методов [8, 14–16, 18]) преобразования (21) в уравнения (22) и (23) [10]. Соответственно, правые части уравнений (12)–(14) желательно так выбирать, чтобы уравнения (22) и (23) были получены аналитически из формулы (21).

На основе выражения (23) получим функцию для индивидуальных параметров системы, определяемых через контрольные динамики ИП системы $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(\text{контр})}(t)$, $i = \overline{1, N_{\text{контр}}}$ при соответствующих контрольных воздействиях $\hat{\mathbf{u}}_i^{(\text{контр})}$, $i = \overline{1, N_{\text{контр}}}$ на нее, входящую в архитектуру модели (см. рис. 2) [10]:

$$\mathbf{p} = \breve{\mathbf{p}}\left(\mathbf{b}, \left\{\hat{\mathbf{u}}_i^{(\text{контр})}, \hat{\mathbf{b}}_i^{(\text{контр})}\right\}_{i=1}^{N_{\text{контр}}}\right),\ \hat{\mathbf{b}}_i^{(\text{контр})} = \hat{\hat{\mathbf{b}}}\left[\tilde{\mathbf{y}}_i^{(\text{контр})}(t)\right],\ i = \overline{1, N_{\text{контр}}}. \tag{24}$$

Аналогично (24) вводится функционал $\hat{\hat{\mathbf{b}}}_{\epsilon_0}$ для определения ϵ_0 через текущую динамику ИП $\tilde{\mathbf{y}}(t)$:

$$\epsilon_0 = \hat{\hat{\mathbf{b}}}_{\epsilon_0}\left[\tilde{\mathbf{y}}(t)\right], \tag{25}$$

представляющий собой функцию для начального состояния системы, входящую в архитектуру модели (см. рис. 2) [10].

В частном случае в силу системы (18)–(20) динамика ПС $\mathbf{x}(t)$ может быть выражена через контрольные динамики с точностью до параметров $\mathbf{b}$. Это облегчает определение параметров $\mathbf{b}$ из статистики ИП, что, например, и было сделано в работе [19].

Результаты

Выражения (17)–(20), (24), (25) представляют собой ММ системы (см. рис. 2) [10], пригодную для решения ПЗ [1–4, 10]. Выражения (17) и (22) представляют собой алгоритм обучения упомянутой ММ системы [10].

ММ системы (17)–(20), (24), (25), структура которой показана на рис. 2, строится в соответствии со следующим алгоритмом:

1) синтезируем систему ДУ динамики физических и химических процессов в рассматриваемой системе на базе ММПЭП;
2) на основе особенностей датчиков ИП рассматриваемой системы формируем соотношение (17);
3) выполняем локальные упрощения ФС для СВП рассматриваемой системы, получив тем самым упрощенные ДУ динамики системы;
4) для локально упрощенной системы ДУ динамики системы рассчитываем различные динамики ее ПС, ИП и КП при различных случайно сгенерированных значениях экспериментально исследуемых параметров ДУ;
5) на основе полученных динамик ПС, ИП и КП рассматриваемой системы формируем итерации (11)–(15) с использованием методов интерполяции;
6) на основе сформированных итераций (11)–(15) получаем выражения (18)–(20);
7) методами теории идентификации, исходя из преобразованной ММ (18)–(20) и из особенностей испытаний рассматриваемой системы, формируем выражения (22), (24), (25);
8) на основе (22) обучаем полученную ММ (17)–(20), (24), (25);
9) тестируем полученную ММ (17)–(20), (24), (25) и при необходимости возвращаемся к предыдущим пунктам предложенного алгоритма с целью корректировки синтезированной ММ (17)–(20), (24), (25).

Приведенный алгоритм позволяет обучать ММ как на всех данных сразу, так и обрабатывая обучающие данные по частям.

Обсуждение

Предложенная в настоящей работе методика синтеза ММ (17)–(20), (24), (25) является развитием методов, изложенных в работах [7–10, 13, 14, 16, 20]. Основным отличием предложенного метода от методов, изложенных в работах [14, 16], является использование базисов, вбирающих в себя физику конкретной рассматриваемой системы, что гарантирует корректность построенной модели [5, 10, 20]. Использование локального упрощения уравнений ММПЭП с последующим синтезом сложных динамик ПС из простых динамик ПС, полученных из упрощенных уравнений ММПЭП, в предложенном методе позволяет существенно сократить по сравнению с методами [13] объем вычислений [20].

Заключение

Методика построения ММ (17)–(20), (24), (25) произвольной системы дает ММ системы, которые могут обучаться в том числе на лету (в процессе функционирования объекта). Благодаря этому ММ (17)–(20), (24), (25) целесообразно использовать в составе цифровых двойников.

Список литературы

1. Юревич Е. И. Основы проектирования техники. СПб. : Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2012. 135 с.
2. Барзилович Е. Ю. Модели технического обслуживания сложных систем. М. : Высш. шк., 1982. 231 с.
3. Колодежный Л. П., Чернодаров А. В. Надежность и техническая диагностика. М. : Изд-во ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, 2010. 452 с.
4. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления. СПб. : Профессия, 2003. 768 с.
5. Khalyutin S. P., Starostin I. E., Agafonkina I. V. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development // Energies. 2023. Vol. 16. P. 1933–1958. doi: 10.3390/en16041933
6. Старостин И. Е., Дружинин А. А. Аналитическое приближение решений уравнений метода математического прототипирования энергетических процессов путем качественного анализа этих уравнений // Надежность и качество сложных систем. 2023. № 2 (42). С. 22–31. doi: 10.21685/2307-4205-2023-2-3
7. Eykhoff P. Systems identification: parametrs and state estimation. Eindhoven, Netherlands : University of technology, 1975. 680 p.
8. Калиткин Н. Н. Численные методы. СПб. : БХВ-Петербург, 2011. 592 с.
9. Ланцов В. Н. Методы понижения порядка моделей сложных систем. Владимир : Изд-во ВлГУ, 2017. 84 с.
10. Старостин И. Е., Дружинин А. А., Гавриленков С. И. Использование машинного обучения с учителем для построения математических моделей систем методом математического прототипирования энергетических процессов // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. 2023. Т. 1. С. 66–72.
11. Старостин И. Е. Программная реализация решения потенциально-потоковым методом задач построения моделей систем из результатов испытаний этих систем // Надежность и качество сложных систем. 2020. № 3 (33). С. 128–136. doi: 10.21685/2307-4205-2020-3-15
12. Starostin I. E., Khalyutin S. P., Bykov V. I. Simplification of potential-flow equations of physical and chemical processes in dynamics for obtaining a mathematical model of a system // The Complex Systems. 2019. № 1. P. 74–87.
13. Starostin I. E., Khalyutin S. P. Identification of system models from potential-stream equations on the basis of deep learning on experimental data // Civil Aviation High Technologies. 2020. Vol. 23, № 2. P. 47–58.
14. Круглов В. В., Дли М. И., Голунов Р. Ю. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети. М. : Физматлит, 2001. 221 с.
15. Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Смородинов А. Д. Некоторые аспекты аппроксимации и интерполяции функций искусственными нейронными сетями // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 38, № 1. С. 54–73. doi: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73
16. Дьяконов В. П. Вейвлеты. От теории к практике. М. : СОЛОН-Пресс, 2010. 440 с.
17. Шишкин И. Ф. Теоретическая метрология. Ч. 2. Обеспечение единства измерений. СПб. : Питер, 2012. 240 с.
18. Flach P. Machine Learning. The Art and Science of Algorithms that Make Sense of Data. Cambridge : Cambridge University Press, 2015. 400 p.
19. Starostin I. E., Khalyutin S. P., Davidov A. O. [et al.]. Obtaining a model for the voltage and temperature of the US18650VTC6 Series lithium-ion battery in constant current discharge mode from the analysis of physical and chemical processes in the accumulator // 18th Technical Scientific Conference on aviation dedicated to the memory of N.E. Zhukovsky, TSCZH 2021. 2021. P. 109–117.
20. Малинецкий Г. Г. Математические основы синергетики: Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М. : Ленанд, 2017. 312 с.

References

1. Yurevich E.I. *Osnovy proektirovaniya tekhniki = Fundamentals of engineering design*. Saint Petersburg: Sankt-Peterburgskiy gosudarstvennyy politekhnicheskiy universitet, 2012:135. (In Russ.)
2. Barzilovich E.Yu. *Modeli tekhnicheskogo obsluzhivaniya slozhnykh system = Models of maintenance of complex systems*. Moscow: Vyssh. shk., 1982:231. (In Russ.)
3. Kolodezhnyy L.P., Chernodarov A.V. *Nadezhnost' i tekhnicheskaya diagnostika = Reliability and technical diagnostics*. Moscow: Izd-vo VVA im. prof. N.E. Zhukovskogo i Yu.A. Gagarina, 2010:452. (In Russ.)
4. Bessekerskiy V.A., Popov E.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya = Theory of automatic control systems*. Saint Petersburg: Professiya, 2003:768. (In Russ.)
5. Khalyutin S.P., Starostin I.E., Agafonkina I.V. Generalized Method of Mathematical Prototyping of Energy Processes for Digital Twins Development. *Energies*. 2023;16:1933–1958. doi: 10.3390/en16041933
6. Starostin I.E., Druzhinin A.A. Analytical approximation of solutions of equations of the method of mathematical prototyping of energy processes by qualitative analysis of these equations. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2023;(2):22–31. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2023-2-3
7. Eykhoff P. *Systems identification: parametrs and state estimation*. Eindhoven, Netherlands: University of technology, 1975:680.
8. Kalitkin N.N. *Chislennye metody = Numerical methods*. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2011:592. (In Russ.)

9. Lantsov V.N. *Metody ponizheniya poryadka modeley slozhnykh system = Methods of lowering the order of models of complex systems*. Vladimir: Izd-vo VlGU, 2017:84. (In Russ.)
10. Starostin I.E., Druzhinin A.A., Gavrilenkov S.I. Using machine learning with a teacher to build mathematical models of systems by mathematical prototyping of energy processes. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo = Proceedings of the International Symposium Reliability and Quality*. 2023;1:66–72. (In Russ.)
11. Starostin I.E. Software implementation of the solution of problems of building models of systems from the test results of these systems by a potentially streaming method. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2020;(3):128–136. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2020-3-15
12. Starostin I.E., Khalyutin S.P., Bykov V.I. Simplification of potential-flow equations of physical and chemical processes in dynamics for obtaining a mathematical model of a system. *The Complex Systems*. 2019;(1):74–87.
13. Starostin I.E., Khalyutin S.P. Identification of system models from potential-stream equations on the basis of deep learning on experimental data. *Civil Aviation High Technologies*. 2020;23(2):47–58.
14. Kruglov V.V., Dli M.I., Golunov R.Yu. *Nechetkaya logika i iskusstvennye neyronnye seti = Fuzzy logic and artificial neural networks*. Moscow: Fizmatlit, 2001:221. (In Russ.)
15. Galkin V.A., Gavrilenko T.V., Smorodinov A.D. Some aspects of approximation and interpolation of functions by artificial neural networks. *Vestnik KRAUNTs. Fiz.-mat. nauki = Vestnik KRAUNTS. Phys.-mat. nauki*. 2022; 38(1):54–73. (In Russ.). doi: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73
16. D'yakonov V.P. *Veyvlety. Ot teorii k praktike = Wavelets. From theory to practice*. Moscow: SOLON-Press, 2010:440. (In Russ.)
17. Shishkin I.F. *Teoreticheskaya metrologiya. Ch. 2. Obespechenie edinstva izmereniy = Theoretical metrology. Part. 2. Ensuring the uniformity of measurements*. Saint Petersburg: Piter, 2012:240. (In Russ.)
18. Flach P. *Machine Learning. The Art and Science of Algorithms that Make Sense of Data*. Cambridge: Cambridge University Press, 2015:400.
19. Starostin I.E., Khalyutin S.P., Davidov A.O. et al. Obtaining a model for the voltage and temperature of the US18650VTC6 Series lithium-ion battery in constant current discharge mode from the analysis of physical and chemical processes in the accumulator. *18th Technical Scientific Conference on aviation dedicated to the memory of N.E. Zhukovsky, TSCZH 2021*. 2021:109–117.
20. Malinetskiy G.G. *Matematicheskie osnovy sinergetiki: Khaos, struktury, vychislitel'nyy eksperiment = Mathematical foundations of synergetics: Chaos, structures, computational experiment*. Moscow: Lenand, 2017:312. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Игорь Евгеньевич Старостин
кандидат технических наук,
доцент кафедры электротехники
и авиационного электрооборудования,
Московский государственный технический
университет гражданской авиации
(Россия, г. Москва, Кронштадтский бульвар, 20)
E-mail: starostinigo@yandex.ru

Igor E. Starostin
Candidate of technical sciences, associate professor
of the sub-department of electrical engineering
and aviation electrical equipment,
Moscow State Technical University of Civil Aviation
(20 Kronshtadtskiy boulevard, Moscow, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 12.02.2024
Поступила после рецензирования/Revised 22.02.2024
Принята к публикации/Accepted 29.02.2024