

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ АРГУМЕНТОВ

Э. В. Лапшин, И. Ю. Семочкина, В. В. Самаров

Введение

Объективные показатели имитационных свойств АТ должны позволить провести оценку результирующих характеристик пилотирования, качества управления, основных эргономических характеристик.

Методика формирования объективных оценок должна предусматривать сравнение групп показателей для условий АТ и ЛА.

Отметим, что методика идентификации должна быть увязана с перечнем летно-технических характеристик. Должен быть разработан перечень возможных отклонений характеристик АТ от характеристик ЛА для всех режимов. Возникает также необходимость разработки методики корректировки модулей динамики полета, обеспечивающей устранение указанных отклонений.

Ясно, что требования к системе испытаний динамики полета должны предъявляться исходя из условий формирования полноценных профессиональных навыков при обучении на АТ.

Сравнение характеристик пилотирования, полученных на АТ и реальном ЛА, должно выполняться с учетом допусков на адекватность АТ. Однако пока нет обоснованных способов назначения этих допусков. Отметим, что не решены даже вопросы определения допусков на показатели эталонного пилотирования, характеризующегося его программой (непрерывными и дискретными показателями, определяемыми во временной области, а также рядом функций от параметров состояния) [1, 2].

Кусочно-линейная интерполяция на разреженной сетке

Рассмотрим метод быстрой кусочно-линейной интерполяции, ориентированный на многомерные задачи [3, 5].

Все изложенные выше подготовительные операции, методика выбора шагов прямоугольной равномерной сетки в пространстве аргументов остаются здесь в силе.

Обратимся вновь к элементарной ячейке сетки в виде прямоугольного параллелепипеда. Одна из вершин ячейки именуется базовой, а противоположная – антибазовой. Так, на рис. 1, соответствующем трехмерному пространству аргументов, вершина 1 может быть принята за базовую, вершина 5 – антибазовую. А всего здесь $2^3 = 8$ возможных вариантов назначения базовой и антибазовой вершин. Вершина 1 на рис. 1 ближе всего расположена к началу координат. Такую вершину будем именовать БВБН (базовая вершина, ближайшая к началу). Любой вершине (узлу) соответствует r ближайших вершин, каждая из которых достигается путем перехода из исходной вершины на один шаг Δ_j ($j = 1, 2, \dots, r$) параллельно соответствующей координатной оси Ox_j .

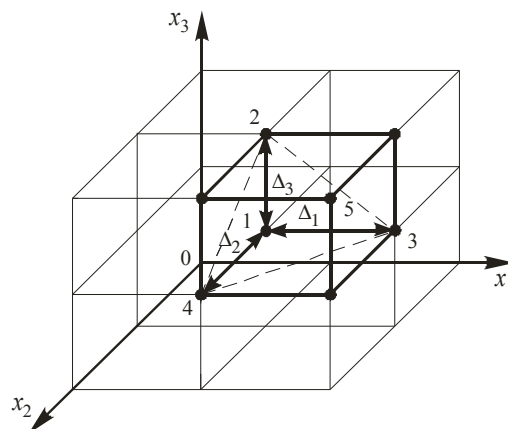


Рис. 1. Элементарная ячейка сетки трехмерного пространства аргументов

Для вершины $[q_1, q_2, \dots, q_r]$ ближайшими являются r вершин:

$$\begin{aligned} & [-q_1, q_2, \dots, q_r], \\ & [q_1, -q_2, \dots, q_r], \\ & \dots\dots\dots, \\ & [q_1, q_2, \dots, -q_r]. \end{aligned} \tag{1}$$

Так, для трехмерного случая рис. 1 ближайшими к вершине l с координатами $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ являются вершины: 3 $\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$, 4 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ и 2 $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

В общем случае гиперплоскость, проходящая через ближайшие вершины (1), описывается уравнением

$$\sum_{j=1}^r \frac{x_j}{q_j \Delta_j} = r - 2 + 2 \sum_{j=1}^r q_j + 4 \sum_{j=1}^r q_j i_j. \tag{2}$$

Эта гиперплоскость делит рассматриваемый элементарный параллелепипед на две субъ-ячейки с условными названиями:

– субъячейка базовой вершины

$$\begin{cases} i_j < \frac{x_j}{\Delta_j} < i_j + 1, & (j=1, 2, \dots, r), \\ \sum_{j=1}^r \frac{x_j}{q_j \Delta_j} > r - 2 + 2 \sum_{j=1}^r q_j + 4 \sum_{j=1}^r q_j i_j, \end{cases} \tag{3}$$

– субъячейка антибазовой вершины

$$\begin{cases} i_j < \frac{x_j}{\Delta_j} < i_j + 1, & (j=1, 2, \dots, r), \\ \sum_{j=1}^r \frac{x_j}{q_j \Delta_j} < r - 2 + 2 \sum_{j=1}^r q_j + 4 \sum_{j=1}^r q_j i_j. \end{cases} \tag{4}$$

Поверхностные точки субъячеек в неравенствах (3), (4) не учитываются.

Определенная симметрия субъячеек базовой и антибазовой вершин имеет место только для двумерного случая, когда эти субъячейки представляют собой треугольники, на которые диагональ делит элементарный прямоугольник. Уже для трехмерного случая симметрия нарушается: субъячейка базовой вершины представляет собой тетраэдр, а субъячейка антибазовой вершины – многогранник с семью вершинами, существенно превосходящий по объему указанный тетраэдр (см. рис. 1). В общем случае субъячейка базовой вершины (3) имеет $r + 1$ вершину, а субъячейка антибазовой вершины имеет $2^r - 1$ вершину, превосходя предыдущую во много раз по объему.

В субъячейке базовой вершины (3) справедлива следующая формула линейной интерполяции [2–6]:

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_r) = f[q_1, q_2, \dots, q_r] + \sum_{j=1}^r \frac{f[q_1, q_2, \dots, q_r] - f[q_1, \dots, -q_j, \dots, q_r]}{2q_j \Delta_j} \left[x_j - \left(i_j + \frac{1}{2} + q_j \right) \Delta_j \right]. \tag{5}$$

Здесь для краткости обозначено

$$f \left[\left(i_1 + \frac{1}{2} + q_1 \right) \Delta_1, \left(i_2 + \frac{1}{2} + q_2 \right) \Delta_2, \dots, \left(i_r + \frac{1}{2} + q_r \right) \Delta_r \right] = f[q_1, q_2, \dots, q_r].$$

В справедливости формулы легко убедиться, подставляя координаты базовой вершины и ближайших к ней вершин из формулы (1) в формулу (5). Для всех этих вершин получаются тождества (знак \sim опускается).

Для субъячейки антибазовой вершины (4) получена следующая формула [4, 5]:

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_r) = D + \sum_{j=1}^r \frac{D - f[q_1, \dots, q_{j-1}, -q_j, q_{j+1}, \dots, q_r]}{2q_j \Delta_j} \left[x_j - \left(i_j + \frac{1}{2} + q_j \right) \Delta_j \right], \quad (6)$$

где

$$D = \frac{1}{r-1} \left(\sum_{j=1}^r f[q_1, \dots, q_{j-1}, -q_j, q_{j+1}, \dots, q_r] - f[-q_1, -q_2, \dots, -q_r] \right). \quad (7)$$

Эта формула может быть названа интерполяционной лишь условно. Дело в том, что она соответствует гиперплоскости в $r+1$ -мерном пространстве функции f и r аргументов, проведенной через точки, соответствующие значениям функции f в r вершинах (1), ближайших к базовой и антибазовой вершине $[-q_1, \dots, -q_r]$. Таким образом, формула (6) дает значения, совпадающие с интерполируемой функцией только в $r+1$ вершине субъячейки (4) из общего числа $2^r - 1$ вершин этой субъячейки.

Условность наименования исчезает, если ввести понятие интерполяции на разреженной неравномерной сетке согласно упомянутому списку узлов: r узлов (вершин), ближайших к $[q_1, q_2, \dots, q_r]$, и антибазовая вершина $[-q_1, -q_2, \dots, -q_r]$. Определение можно также дать с использованием понятия симплекса [4, 5, 7].

Назначение базовой вершины в системе алгоритмов (3)–(7) в общем случае произвольно. При фиксированной базовой вершине в каждой элементарной ячейке оно допускает 2^r вариантов. Если в каждой элементарной ячейке в качестве базовой выбирается БВБН $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2} \right]$, то формулы (3)–(7) принимают следующий вид:

– субъячейка базовой вершины

$$\begin{cases} i_j < \frac{x_j}{\Delta_j} < i_j + 1, (j = 1, 2, \dots, r), \\ \sum_{j=1}^r \frac{x_j}{\Delta_j} < 1 + \sum_{j=1}^r i_j; \end{cases} \quad (8)$$

– субъячейка антибазовой вершины

$$\begin{cases} i_j < \frac{x_j}{\Delta_j} < i_j + 1, (j = 1, 2, \dots, r), \\ \sum_{j=1}^r \frac{x_j}{\Delta_j} > 1 + \sum_{j=1}^r i_j; \end{cases} \quad (9)$$

– формула линейной интерполяции в субъячейке базовой вершины

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_r) = & f\left[-\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right] - \sum_{j=1}^r \left(f\left[-\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right] - \right. \\ & \left. - f\left[\underbrace{-\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}}_{j-1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}\right] \right) \times \left(\frac{x_j}{\Delta_j} - i_j \right); \end{aligned} \quad (10)$$

– формулы линейной интерполяции (на разреженной сетке) в субъячейке антибазовой вершины

$$\tilde{f}(x_1, x_2, \dots, x_r) = D + \sum_{j=1}^r \left(D - f \left[\underbrace{-\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}}_{j-1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2} \right] \right) \left(\frac{x_j}{\Delta_j} - i_j - 1 \right), \quad (11)$$

где

$$D = \frac{1}{r-1} \left(\sum_{j=1}^r f \left[\underbrace{-\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}}_{j-1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2} \right] - f \left[\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2} \right] \right). \quad (12)$$

Главным достоинством алгоритмов (3)–(7) и (8)–(12) применительно к многомерным задачам интерполяции являются малые вычислительные затраты на однократное определение функции \tilde{f} , относительно малые необходимые объемы памяти и массива исходных данных.

Действительно, если принять, что значения интерполируемой функции извлекаются из памяти и операции адресации не учитываются, то для однократного вычисления функции \tilde{f} согласно формулам (3)–(7) (при назначении базовой вершины каждый раз заново) требуется примерно $2r + 1$ операций сравнения ($>, <$), $7r + 4$ операций сложения, $6r + 2$ операций умножения и деления, т.е. всего приблизительно $15r$ операций. При фиксированном номере базовой вершины, в частности при использовании во всех элементарных ячейках БВБН (формулы (8)–(12)), число операций еще сокращается примерно до $9r$. Очень важно, что необходимое число операций растет здесь только пропорционально размерности задачи, в то время как при кусочно-линейчатой интерполяции Лагранжа имеет место более чем степенной рост ($3r \cdot 2^r$, см. выше).

Число «задействованных» узлов равномерной сетки при выполнении алгоритмов (3)–(7) и (8)–(12) составляет примерно

$$\frac{r+2}{2^r} \prod_{j=1}^r N_j, \quad (13)$$

где N_j – число узлов равномерной сетки по одной координате.

При $r = 6$ имеем сокращение числа операций по сравнению с неразряженной сеткой в 8 раз, при $r = 10$ – в 85 раз.

Соответственно этому сокращается необходимый объем памяти и необходимый объем исходного экспериментального материала. Правда, последнее реализуется лишь при интегрированной технологии, когда испытания и идентификационные эксперименты увязываются с планируемым методом аппроксимации.

Все эти достоинства очень существенны для практики, однако за них приходится, вообще говоря, платить ценой снижения точности интерполяции. Для того чтобы показать это, обратим еще раз внимание на то, что субъячейки, соответствующие базовой и антибазовой вершинам, при большой размерности r , резко отличаются по объему, и наибольшие ошибки интерполяции следует ожидать в антибазовых субъячейках.

При $r > 2$ центр элементарной ячейки, определяемый координатами

$$x_1 = \left(i_1 + \frac{1}{2} \right) \Delta_1, \quad x_2 = \left(i_2 + \frac{1}{2} \right) \Delta_2, \dots, x_r = \left(i_r + \frac{1}{2} \right) \Delta_r, \quad (14)$$

всегда находится в антибазовой субъячейке.

Подставляя (14) в формулы (6), (7), получаем после преобразований

$$\tilde{f} = \frac{1}{2(r-1)} \left[(r-2) f[-q_1, \dots, -q_r] + \sum_{j=1}^r f[q_1, \dots, q_{j-1}, -q_j, q_{j+1}, \dots, q_r] \right]. \quad (15)$$

Из этого выражения видно, что с ростом r «вклад» значения интерполируемой функции в антибазисной вершине увеличивается, стремясь к 0,5 от общего значения функции \tilde{f} .

Для квадратичной интерполируемой функции

$$f = f_0 + \sum_{j=1}^r \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_0 (x_j - i_j \Delta_j) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^r \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)_0 (x_j - i_j \Delta_j)(x_k - i_k \Delta_k)$$

ошибка рассматриваемой интерполяции в центре элементарного параллелепипеда при $r > 2$ составляет

$$\delta = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r-1} \right) \sum_{j \neq k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)_0 \Delta_j \Delta_k + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right)_0 \Delta_j^2. \quad (16)$$

Заключение

Сопоставляя эту формулу с формулой ошибки интерполяции Лагранжа

$$\delta = \tilde{f} \left[\left(i_1 + \frac{1}{2} \right) \Delta_1, \dots, \left(i_r + \frac{1}{2} \right) \Delta_r \right] - f \left[\left(i_1 + \frac{1}{2} \right) \Delta_1, \dots, \left(i_r + \frac{1}{2} \right) \Delta_r \right] = \frac{1}{8} \sum_{j \neq k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right)_0 \Delta_j \Delta_k, \quad (17)$$

(где суммирование ведется по всем значениям j, k от 1 до r за исключением значений $j = k$) для той же средней точки, приходим к заключению, что при больших значениях r величина ошибки по формуле (16) для выпуклой интерполируемой функции превышает величину ошибки по формуле (17) на

$$\frac{1}{8} \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \right)_0 \Delta_j^2.$$

Между тем, если применить для той же центральной точки формулу (5) (в этом случае при $r > 2$ эта формула выступает в роли экстраполяционной, а не интерполяционной), то ошибка по абсолютной величине будет точно соответствовать формуле (17), т.е. будет меньше.

Дальнейшее развитие метода содержится в работах Наумова А. И.

Основная идея развития заключается в следующем. В качестве базовой каждый раз выбирается ближайшая к точке (x_1, x_2, \dots, x_r) вершина элементарного параллелепипеда и применяется формула (5). При этом ценой некоторого увеличения вычислительных затрат удастся повысить точность аппроксимации.

Библиографический список

1. Данилов, А. М. Аппроксимационные задачи в подготовке баз данных / А. М. Данилов, Э. В. Лапшин, В. Н. Шихалеев // Тренажеры и имитаторы : труды семинара. – Пенза, 1990. – С. 11–13.
2. Авиационные тренажеры модульной архитектуры : монография / Э. В. Лапшин, А. М. Данилов, И. А. Гарькина, Б. В. Клюев, Н. К. Юрков ; под ред. Э. В. Лапшина, А. М. Данилова. – Пенза : Информационно-издательский центр ПГУ, 2005. – 148 с.
3. Разработка системы управления полетом перспективного истребителя с использованием пилотажных моделирующих стендов // Авиастроение. Экспресс-информация. – 1986. – № 25. – С. 10–23.
4. Красовский, А. А. Двойная линеаризация и быстрое численное моделирование нелинейных динамических систем / А. А. Красовский // ДАН СССР. – 1989. – С. 345–348.
5. Красовский, А. А. Математическое моделирование динамики полета летательного аппарата : монография / А. А. Красовский, Э. В. Лапшин, Н. К. Юрков ; под ред. Э. В. Лапшина. – Пенза : Изд-во Пензенского филиала РГУ ИТТ, 2008. – 260 с.
6. Кубланов, М. С. Об адекватности математических моделей и задаче идентификации / М. С. Кубланов // Научный Вестник МГТУ ГА. Сер.: Аэромеханика и прочность. – 2009. – № 138. – С. 101–106.
7. Лапшин, Э. В. Исследование информационных процессов, протекающих в тренажерах / Э. В. Лапшин // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 2. – С. 87–93.

Лапшин Эдуард Владимирович

доктор технических наук, профессор,
кафедра конструирования и
производства радиоаппаратуры,
Пензенский государственный университет
(440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: edlapshin@mail.ru

Семочкина Ирина Юриевна

кандидат технических наук, доцент,
кафедра информационных технологий и систем,
Пензенский государственный
технологический университет
(440039, Россия, г. Пенза,
пр. Байдукова / ул. Гагарина, 1а/11)
E-mail: ius1961@gmail.com

Самаров Владимир Владимирович

заместитель начальника
испытательной лаборатории,
ООО «16 НИИЦ»
(141008, Россия, г. Мытищи,
Новомытищинский пр-т, 198)
E-mail: samarov_vladimir@mail.ru

Аннотация. Структура математических моделей объектов, способы аппроксимации (интерполяции) их характеристик, методы и средства идентификации должны быть согласованы между собой и составлять единую информационную технологию, удобную для применения, в частности, в авиационных тренажерах. Вычислительные методы, применяемые при разработке имитаторов авиационных тренажеров, да и других технических средств обучения, можно разделить на общие и специальные. Общие методы представляют собой известные методы вычислительной математики, составляющие один из важнейших разделов прикладной математики вообще. Они реализованы в программном обеспечении универсальных ЭВМ, соответствующих программных «оболочках». В укрупненном виде информационная технология идентификации состоит из следующих этапов: получение исходных экспериментальных и расчетных данных; первичная обработка и создание массива данных; назначение областей аппроксимации в пространствах аргументов; выбор метода аппроксимации и выполнение аппроксимации; разработка рабочих алгоритмов; оценка точности. Идентификация, как правило, требует творчества, носит характер исследования и лишь в редких случаях может быть полностью формализована. Исследовательский итерационный характер носят, в частности, такие этапы, как назначение областей аппроксимации, выбор метода аппроксимации и др.

Ключевые слова: имитаторы авиационных тренажеров, математические модели объектов, способы аппроксимации (интерполяции) их характеристик, методы и средства идентификации, метод аппроксимации.

Lapshin Eduard Vladimirovich

doctor of technical sciences, professor,
sub-department of radio equipment design
and production,
Penza State University
(440026, 40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Semochkina Irina Yurievna

candidate of technical sciences, associate professor,
sub-department of information technology and systems,
Penza State Technological University
(440039, 1a/11 Baidukova avenue/Gagarina street,
Penza, Russia)

Samarov Vladimir Vladimirovich

deputy head of test laboratory,
LLC «16 NIITS»
(141008, 198 Novomytischinskiy avenue,
Mytischki, Russia)

Abstract. The structure of the mathematical models of objects, methods of approximation (interpolation) of their characteristics, the methods and means of identification should be agreed among themselves and form a single information technology, convenient to use, in particular, in aircraft simulators. Computational methods used in the development of models of aircraft simulators and other technical teaching aids, can be divided into General and specific. Common methods are well-known methods of computational mathematics that make up one of the most important topics in applied mathematics at all. They are implemented in software on the mainframe, the relevant programme «shells». In the enlarged form of information technology of identification consists of the following stages: baseline experimental and calculated data; primary processing and creation of the data array; designation of areas of approximation in spaces of arguments; the choice of method of approximation and implementation of approximation; develop working algorithms; evaluation of accuracy. Identification usually requires creativity, nature study, and only in rare cases, it may be completely formalized. Iterative research are, inter alia, such as assigning areas of approximation, the choice of method of approximation, etc.

Key words: simulators aviation simulators, mathematical object model, methods of approximation (interpolation) of their characteristics, the methods and means of identification, method of approximation.

УДК 629.7.072.8

Лапшин, Э. В.

Кусочно-линейная интерполяция функций многих аргументов / Э. В. Лапшин, И. Ю. Семочкина, В. В. Самаров // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 4 (20). – С. 42–48. DOI 10.21685/2307-4205-2017-4-6.