

МОДЕЛЬ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ В СИСТЕМЕ АРТЕРИЯ – МАНЖЕТА

В. Г. Полосин¹, С. И. Геращенко², М. С. Геращенко³, О. Е. Безбородова⁴

^{1, 2, 3, 4} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
^{1, 2, 3} mpo@list.ru, ⁴ ot@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Окклюзивная манжета широко используется при неинвазивном измерении артериального давления. Механическое взаимодействие между артерией, тканями предплечья и манжетой являются фактором, потенциально влияющим на точность измерения систолического и диастолического давления. Для количественной оценки внутри манжетных напряжений, создаваемых компрессионной манжетой, необходимо проведение теоретических исследований с целью определения факторов, оказывающих существенное влияние на оценки артериального давления. *Материалы и методы.* В работе предложено при построении модели изменения геометрических размеров упругой оболочки от разницы давлений использовать тензоры напряжений и деформаций в виде трехмерных векторов нормальных и касательных компонент, что обеспечило компактность и прозрачность представления вывода основных уравнений. В результате проведенного исследования показано, что моделируемые деформации обладают высокой чувствительностью к распределению давления на внешней и внутренней поверхности цилиндрического сосуда. Более того, ткани сосуда испытывают объемное сжатие, вызывающее деформацию оболочки сосуда по толщине, и образование напряженного состояния тканей при отсутствии избыточного давления внутри сосуда. Так как для толстостенного сосуда площади внутренней и наружной поверхностей различны, в результате сжатия происходит фиксируемое в манжете смещение тканей из-за разности суммарных внешних сил. Модель позволяет демонстрировать деформацию сосуда и изменение его геометрических размеров под действием внешнего давления, приложенного к организму. *Результаты и выводы.* Проведенное исследование показывает, что на измерения артериального давления серьезное влияние могут оказывать нелинейные свойства модуля упругости оболочки артерии в моделях исследования при трансмуральном взаимодействии, основанном на использовании окклюзивной манжеты.

Ключевые слова: артериальное давление, модель упругой артерии, свойства тканей биологических оболочек, деформация оболочки, окклюзивная манжета

Для цитирования: Полосин В. Г., Геращенко С. И., Геращенко М. С., Безбородова О. Е. Модель упругой оболочки в системе артерия – манжета // Надежность и качество сложных систем. 2023. № 3. С. 62–73. doi: 10.21685/2307-4205-2023-3-8

MODEL OF THE ELASTIC SHELL IN THE ARTERY – CUFF SYSTEM

V.G. Polosin¹, S.I. Gerashchenko², M.S. Gerashchenko³, O.E. Bezborodova⁴

^{1, 2, 3, 4} Penza State University, Penza, Russia
^{1, 2, 3} mpo@list.ru, ⁴ ot@pnzgu.ru

Abstract. *Background.* The occlusal cuff is widely used for non-invasive blood pressure measurement. The mechanical interaction between the artery, forearm tissue and cuff is a factor potentially affecting the accuracy of systolic and diastolic pressure measurements. *Materials and methods.* To quantify the intra-cuff stresses created by the compression cuff, it is necessary to conduct theoretical studies to determine the factors that have a significant impact on blood pressure estimates. In the work, it was proposed to use the stress and strain tensors in the form of three-dimensional vectors of normal and tangent components when building a model for changing the geometric dimensions of the elastic shell from pressure difference, which ensured the compactness and transparency of the representation of the derivation of basic equations. As a result of the study, it was shown that the simulated deformations are highly sensitive to the pressure distribution on the outer and inner surfaces of a cylindrical vessel. Moreover, vessel tissues experience volume compression, which causes deformation of the vessel shell in thickness and the formation of a stressed state of tissues in the absence of excessive pressure inside the vessel. Since for a thick-walled vessel, the areas of the inner and outer surfaces are different as a result of compression, a fixed displacement of the tissues occurs in the cuff, due to the difference in the total external forces. The model allows you to demonstrate the deformation of the vessel and the change in its geometric dimensions under the influence of external pressure applied to the body. *Results and conclusions.* The study shows that blood pressure measurements can be seriously influenced by the nonlinear properties of the elastic modulus of the arterial membrane in transmural interaction models based on the use of an occlusive cuff.

Keywords: blood pressure, elastic artery model, biological tissue properties, shell deformation, occlusive cuff

For citation: Polosin V.G., Gerashchenko S.I., Gerashchenko M.S., Bezborodova O.E. Model of the elastic shell in the artery – cuff system. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems*. 2023;(3):62–73. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2023-3-8

Введение

Артериальное давление (АД) является одним из наиболее известных и распространенных медицинских показателей, используемых в быту и лечебных учреждениях. Особую значимость оценка АД имеет для лиц, страдающих выраженными формами нарушений сердечно-сосудистой системы [1]. В настоящее время достаточно востребованными являются тонометры осцилляторного типа, использующие для создания избыточного давления манжеты, накачиваемые воздухом. В основном они предназначены для оценки АД в бытовых условиях при самостоятельном контроле давления. Их неоспоримыми преимуществами являются: электронный способ измерения с цифровым и звуковым представлением информации, компактность, отсутствие дополнительных средств для прослушивания тонов, осуществление измерения в автоматическом режиме неподготовленными пользователями.

Принцип работы тонометров осцилляторного типа основан на изменении объема артерии под манжетой при прохождении пульсовой волны, вызывающей колебания давления в манжете (осцилляции). Изменение амплитуды осцилляций в процессе компрессии или декомпрессии служит основой для вычисления значений систолического и диастолического давлений.

Использование воздуха в качестве рабочего тела для преобразования изменения объема манжеты позволяет получать амплитуды пульсаций давления в манжете 1–2 мм рт. ст. Малая амплитуда осцилляций создает множество проблем при реализации алгоритмов обработки сигнала и вычислении значений давления. В целом это приводит к существенным погрешностям приборов данного класса. Их аттестация осуществляется на основании протоколов Британского гипертонического общества BHS [2], согласно которым устройство должно иметь по крайней мере 60 % измерений в пределах погрешности 5 мм рт. ст., 85 % измерений – в пределах погрешности 10 мм рт. ст. и 95 % – в пределах погрешности 15 мм рт. ст.

Увеличения амплитуды пульсаций удалось достичь за счет замены воздуха на жидкость [3]. Как показала практика использования гидроманжеты, амплитуда пульсаций составляет 40–50 % от вариации систолического и диастолического значений измеряемого давления и составляет 20–30 мм рт. ст. Это создает предпосылки для создания тонометров повышенной точности, способных решать задачи современных клинических рекомендаций по диагностике и лечению артериальной гипертензии, выявлению критических состояний сердечно-сосудистой системы, требующих достаточно высокой точности измерения артериального давления.

Механизм формирования пульсаций давления в окклюзивной гидроманжете существенно отличается от процессов, происходящих в манжете, заполненной воздухом. Одно из главных отличий формирования осцилляций заключается в механизме взаимодействия артерии, тканей предплечья и гидроманжеты. Поскольку жидкость несжимаема, то и объемы перечисленных элементов практически не меняются в процессе прохождения пульсовой волны в артерии под манжетой. Передача давления от внутренней стенки артерии к манжете осуществляется за счет упругих радиальных и угловых деформаций тканей артерий и манжеты.

Форма и динамические изменения амплитуды осцилляций в процессе компрессии или декомпрессии являются основой для реализации гидроманжетного метода и разработки алгоритмов оценки параметров, характеризующих состояние сердечно-сосудистой системы. Отсутствие теоретических знаний о процессе формирования осцилляций в гидроманжете не позволяет оптимизировать структуру гидроманжетных приборов, разрабатывать эффективные методики оценки гемодинамических параметров. В этой связи необходимы исследования физико-технических, математических и метрологических закономерностей функционирования гидроманжетных систем, позволяющих получить теоретические знания, необходимые для реализации гидроманжетной технологии формирования осцилляций.

В настоящей работе создана модель, позволяющая оценить механическую деформацию стенки сосуда при изменении давления на внутренней и внешней его поверхностях упругой цилиндрической модели сосуда. Построение взаимосвязей модели основано на представлении тензоров напряжений и деформаций в виде трехмерных векторов для нормальных и для касательных составляющих.

Биологические ткани относятся к композитным материалам, содержащим в своем составе компоненты твердых веществ и жидкостей. При рассмотрении фундаментальных механических свойств (упругости и вязкости) используются модели механики конденсированных сред. Базовые сведения для свойств биологических материалов можно найти в специальных руководствах по теории упругости и вязкости, например, в работах «Реология полимеров» авторов Виноградова Г. Б., Малкина А. Я. [4] и «Моделирование в биомеханике» Бегуна П. И., Афонина П. Н. [5].

Для изучения влияния механических свойств поверхностных биологических тканей и упругих свойств внутренней оболочки манжеты были построены математические модели в виде упрощенной цилиндрической геометрии для распределения мягких тканей и оболочек артерии [6, 9, 10]. В существующих моделях использовано предположение, что плечевая артерия представляет собой тонкостенную трубку, изолированную от окружающих несжимаемых тканей. В ряде исследований пренебрегается зависимостью механических свойств тканей, таких как вязкость, упругость, инертность и сжимаемость, от внешнего давления, что приводит к искажению результатов измерения. В этой связи актуальны исследования влияния механических свойств тканей на трансмуральную передачу давления. Основная задача исследования состоит в разработке упругой модели для оценки влияния изменения внешнего давления на механические свойства плечевой артерии и на осциллометрические измерения АД.

Упругость эластичных оболочек

Под действием внешних сил биологические оболочки деформируются, изменяя свою форму и объем. Механическая деформация стенки сосуда при изменении давления зависит от его структурных компонентов и от разницы давлений на внутренней и внешней его поверхностях [10]. Механические свойства сосуда как упругого резервуара зависят от состояния его оболочки, состоящей из коллагена, эластина и мышечной ткани. Различают упругие и пластичные деформации. При упругой деформации оболочка после снятия нагрузки полностью восстанавливает свою форму. Свойство тел сохранять остаточную деформацию после снятия нагрузки характеризуется пластичностью. Биологические оболочки обладают упруго-пластическими свойствами при больших напряжениях: в области малых напряжений биологические оболочки испытывают нелинейные упругие деформации сосудистой ткани, при превышении нагрузки некоторого значения в оболочке появляются остаточные деформации.

Упругие свойства материала сосуда также имеют явно выраженные нелинейные свойства. При малой разнице давления упругие свойства сосуда определены свойствами эластина, который может быть деформирован на 200...300 %. Модуль упругости эластина меняется от 0,1 до 0,6 МПа. При повышении разности давления свойства ткани определены коллагеном с высоким модулем упругости порядка 10...100 МПа и предельной деформацией 10 %. Процентный состав эластина и коллагена определяет ярко выраженную механическую нелинейность упругих свойств стенок сосудов.

Деформация произвольной оболочки

Под действием нагрузки оболочка деформируется и изменяет свою форму. Деформация тканей оболочки отражается с помощью смещения точек оболочки, заданного полем вектора полного перемещения точек $[u] = [u_1, u_2, u_3]$, где u_i – проекция вектора на ортогональные оси координат x_i . Для задания напряженного состояния деформированной оболочки используют симметричные тензоры второго ранга с шестью независимыми компонентами: тензор напряжений σ_{ij} и тензор деформаций ϵ_{ij} . В области нелинейных упругих деформаций оболочки напряжения в любой ее точке однозначно задано функцией деформации [11–13]:

$$\sigma_{ij} = \varphi_{ij}(\epsilon_{km}). \quad (1)$$

Для построения взаимосвязей упругих деформаций тензоры напряжений и деформации записаны в виде трехмерных векторов для нормальных и касательных составляющих напряжений ($[\sigma_n] = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}]^T$; $[\sigma_t] = [\sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T$) и для нормальных и сдвиговых деформаций ($[\epsilon_n] = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}]^T$; $[\epsilon_t] = [\epsilon_{12}, \epsilon_{23}, \epsilon_{31}]^T$). Здесь $[\sigma_n]$ – вектор нормальных напряжений к площадкам напряженностей, для которых направление векторов площадки и напряженности совпадают; $[\sigma_t]$ – вектор сдвиговых (касательных) напряжений, для которых направление векторов площадки и напряженности перпендикулярны; $[\epsilon_n]$ – вектор деформаций сжатия – растяжения; $[\epsilon_t]$ – вектор деформаций сдвига.

Так как свойства изотропных материалов (тканей) не изменяются в зависимости от направлений, то такие материалы имеют одинаковый модуль упругости (модуль эластичности) E и коэффициент Пуассона ν во всех направлениях. Наиболее общая форма изотропных соотношений напряжений и деформаций имеет вид [14, 15]:

$$\begin{aligned} [\sigma_n] &= \lambda \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{\nu} - 2 \right) [\delta] \right) \cdot [\varepsilon_v]; \\ [\sigma_\tau] &= \mu \cdot [\delta] \times [\varepsilon_\gamma]. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $[\delta]$ – метрический тензор для символов Кронекера, определяемых скалярным произведением базисных векторов (\vec{e}_i, \vec{e}_j) : $\delta_{ij} = 1$ при условии $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при условии $i \neq j$; λ и μ – параметры Ламе:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{1 - \nu - 2\nu^2}, \\ \mu &= \frac{E}{2(1 + \nu)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для упругих изотропных тел справедливы соотношения обобщенного закона Гука [11, 12, 14]:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\Theta\delta_{ij}, \quad (4)$$

где Θ – объемная деформация: $\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$.

Компоненты напряженности σ_{ij} и их первые частные производные $\sigma_{ij,i}$ – непрерывные функции координат, связанные с объемными внешними силами тремя уравнениями равновесия

$$\sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad (5)$$

где ρ – плотность материала оболочки.

Определение деформированного состояния оболочки заключается в том, что по перемещению точек u_i вычисляются линейные удлинения вдоль осей. Сдвиговые деформации равны половине суммарного изменения прямого угла между осями. В общем случае для построения взаимосвязи компонентов деформации и малых перемещений используют соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = 0,5 \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (6)$$

Совокупность уравнений (4), (5) и (6) позволяет получить решения для деформированного состояния упругой оболочки.

Модель артерии и оболочки манжеты

При моделировании передачи давления в окклюзивных системах артерии и внутренней оболочки манжеты объекты модели представлены в форме тонкостенных цилиндрических оболочек [10]. На рис. 1 дана модель образования упругих напряжений в сегменте сосуда, имеющего форму осесимметричной цилиндрической оболочки. Разница давления p_i на внутреннюю (*inside*) и давления p_o на наружную (*outside*) цилиндрические поверхности модели сосуда определяет появление сил натяжения T_2 в сосудистой оболочке. В связи с тем, что передача давления от артерии в манжету зависит от смещения поверхностей оболочки при изменении давления крови внутри артерии вследствие распространения пульсовой волны, для построения тракта передачи давления от артерии в манжету важна качественная и количественная оценка деформаций артерии с учетом ее нелинейных особенностей.

Задача оценки деформаций сосуда и напряжений в сосудистой оболочке решается на основе теории упругости. Для решения задачи использована цилиндрическая система координат, в которой направления компонентов вектора перемещений совпадают с направлениями базисных векторов $[u] = [u_1, u_2, u_3] = [u_r, u_\phi, u_z]$. В силу осевой симметрии модели артерии компоненты тензора деформаций и тензора напряжений также заданы через базисные векторы цилиндрической системы координат. Для компонент векторов деформаций сжатия–растяжения и деформаций сдвига в цилиндрической системе координат справедливы соотношения

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_n] = [\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\varphi\varphi}, \varepsilon_{zz}]^T = [u_{r,r}, r^{-1}(u_{\varphi,\varphi} + u_r), u_{z,z}]^T, \quad (7)$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma] = [\varepsilon_{r\varphi}, \varepsilon_{\varphi z}, \varepsilon_{rz}]^T = \frac{1}{2} [(r^{-1}u_{r,\varphi} + u_{\varphi,r} - r^{-1}u_\varphi), (u_{\varphi,r} + r^{-1}u_{z,\varphi}), (u_{z,r} + u_{r,z})]. \quad (8)$$

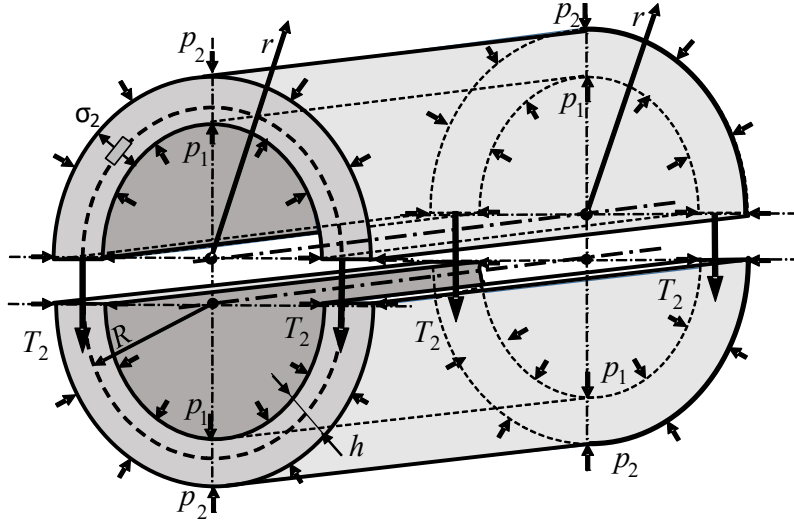


Рис. 1. Модель образования упругих напряжений в сегменте цилиндрической оболочки

Векторы нормальных и сдвиговых напряжений связаны с векторами деформаций сжатия–растяжения и деформаций сдвига законом Гука:

$$[\boldsymbol{\sigma}_n] = 2\mu[\boldsymbol{\varepsilon}_n] + \lambda\Theta; \quad (9)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}_\tau] = 2\mu[\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma], \quad (10)$$

где Θ – относительная объемная деформация: $\Theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz}$.

Уравнения равновесия для модели сосуда в цилиндрической системе координат имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_{r\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\sigma_{rz})}{\partial z} + \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} \rho F_r &= 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2\sigma_{r\varphi})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_{\varphi\varphi})}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\sigma_{\varphi z})}{\partial z} + \rho F_\varphi &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_{\varphi z})}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\sigma_{zz})}{\partial z} + \rho F_z &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь ρ – удельная плотность биологических тканей артерии; F_r, F_φ, F_z – компоненты вектора объемной силы.

Так как деформация цилиндрического сосуда определена разностью давлений на внутренней и наружной цилиндрических поверхностях сосуда, то для модели деформации справедлива осевая симметрия. В соответствии с законом Паскаля давление внутри сосуда изотропно и действует во всех направлениях одинаково. Вследствие того, что деформация стенок сосуда происходит только в радиальном направлении, все компоненты вектора сдвиговых деформаций равны нулю $[\boldsymbol{\varepsilon}_\gamma] = [0, 0, 0]^T$. Для вектора деформаций растяжения–сжатия сохраняются радиальная и угловая компоненты:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}_n] = [u_{r,r}, (r^{-1}u_r), 0]^T. \quad (12)$$

Компонента в направлении оси z принята равной нулю, так как в направлении оси симметрии не происходит перемещений точек цилиндрической модели оболочки.

Компоненты напряжений найдены в соответствии с законом Гука, записанным в векторной форме для нормальных (9) и сдвиговых (10) компонент. Так как компоненты сдвиговых деформаций

равны нулю, то из выражения (10) следует, что все компоненты сдвиговых напряжений также равны нулю: $[\sigma_{\tau}] = 2\mu[\epsilon_{\tau}] = [0, 0, 0]^T$. Путем замены компонент радиальных деформаций векторного выражения (9) с помощью радиальной компоненты перемещений (7) записан вектор нормальных деформаций через радиальные перемещения точек цилиндрической оболочки:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu\epsilon_{rr} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) \\ 2\mu\epsilon_{\varphi\varphi} + \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) \\ \lambda(\epsilon_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)u_{r,r} + \lambda ur^{-1} \\ (\lambda + 2\mu)ur^{-1} + \lambda u_{r,r} \\ \lambda(ur^{-1} + u_{r,r}) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Так как сдвиговые напряжения равны нулю, то уравнение равновесия для стенок сосуда (13) примет вид

$$\frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0. \quad (14)$$

В результате подстановки компонент нормальных напряжений (13) в выражение (14) после упрощения получено дифференциальное уравнение для вектора перемещений точек упругой цилиндрической оболочки:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru_r) \right) = 0. \quad (15)$$

На решение дифференциального уравнения (15) накладываются граничные условия в форме равенств напряжений и давлений на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях артерии. Накладываемые граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(R_i) &= -p_i, \\ \sigma_{rr}(R_o) &= p_o. \end{aligned} \quad (16)$$

Положительное и отрицательное значения давлений в правой части граничных условий (16) учитывают направления компонент радиальных напряжений, которые компенсируют внешнее давление. Так как точки упругой цилиндрической оболочки под действием симметрично приложенного давления смещаются в направлении радиус-вектора, решение дифференциального уравнения (15) имеет только радиальную составляющую вектора перемещений. Угловая и осевая составляющие перемещений равны нулю. Общее решение однородного дифференциального уравнения (15) для перемещений $u(r)$ точек упругой цилиндрической оболочки имеет вид

$$u_r(r) = 0,5 \cdot C_1 r + C_2 r^{-1}, \quad (17)$$

где C_1 и C_2 – коэффициенты решения.

С учетом общего решения (17) формула для расчета компоненты радиальной напряженности в оболочке примет вид

$$\sigma_{rr} = C_1(\lambda + \mu) - 2\mu C_2 r^{-2}. \quad (18)$$

Система уравнений для определения коэффициентов C_1 и C_2 получена наложением граничных условий (16) на решение для компоненты радиальной напряженности (18). Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} v^{-1}\lambda(C_1(v + \mu\lambda^{-1}v) - (1 - 2v)C_2R_i^{-2}) = -p_i; \\ v^{-1}\lambda(C_1(v + \mu\lambda^{-1}v) - (1 - 2v)C_2R_o^{-2}) = p_o. \end{cases} \quad (19)$$

Из решения системы уравнений (19) получены формулы для вычисления коэффициентов C_1 и C_2 решения (15):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{(\lambda + \mu)} \frac{(p_o R_o^2 + p_i R_i^2)}{(R_o^2 - R_i^2)}, \\ C_2 &= \frac{v}{\lambda(1 - 2v)} \frac{R_i^2 R_o^2 (p_o + p_i)}{(R_o^2 - R_i^2)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Путем подстановки постоянных (20) в общее решение однородного дифференциального уравнения (17) для перемещений точек упругой цилиндрической оболочки и замены параметров Ламе в соответствии с формулами (3) получено выражение для расчета перемещений точек модели артерии и оболочки манжеты при действии давлений p_0 и p_1 :

$$u_r(r) = \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{R_o^2 - R_i^2} \left((1-2\nu)(p_o R_o^2 + p_i R_i^2)r + R_i^2 \cdot R_o^2 \cdot (p_o + p_i) \frac{1}{r} \right). \quad (21)$$

Радиальная и угловая компоненты вектора деформаций растяжения–сжатия (12) содержат две составляющие, выраженные через радиальную компоненту перемещений точек модели артерии и оболочки манжеты. Для расчета вектор деформаций удобно представить в форме

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{(R_o^2 - R_i^2)} \begin{bmatrix} (1-2\nu) & -1 \\ (1-2\nu) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o R_o^2 + p_i R_i^2 \\ R_i^2 \cdot R_o^2 \cdot (p_o + p_i) \cdot r^{-2} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Общее решение для компонент вектора нормальных напряжений (13) также удобно записать в форме матричного выражения, выполнив подстановку компонент вектора деформаций (22) в выражение для вектора напряжений (13):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_o^2 - R_i^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o R_o^2 + p_i R_i^2 \\ R_i^2 R_o^2 (p_o + p_i) r^{-2} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Из выражений для перемещения точек цилиндра (22) и вектора деформации (23) следует, что при нормальном атмосферном давлении упругая оболочка находится в деформированном состоянии, которое обусловлено воздействием давления на внутреннюю и наружную поверхность. Так как при моделировании упругих свойств заложено условие упругости оболочки, то при снятии давления оболочка деформируется до размеров, которые соответствуют упругой оболочке при отсутствии внешней нагрузки. Этому состоянию соответствуют радиусы R_o и R_i , для которых используется термин «собственные радиусы». Для вычисления радиальных координат r точек ненагруженной цилиндрической модели сосуда и оболочки манжеты относительно радиальных координат r^* тех же точек оболочки нагруженной атмосферным давлением использовано выражение вида

$$r + u_r(r) = r^*. \quad (24)$$

Особенность составляющих состоит в том, что векторы имеют одинаковые слагаемые, входящие с разными знаками. Радиальная и угловая деформации линейно изменяются от приращения давления. Если внешнее и внутреннее давление равны, то под действием внешних давлений упругий сосуд деформируется и его размеры изменяются. Выражение (23) иллюстрирует, что компоненты вектора нормальных напряжений при условии равновесия полностью определены начальными размерами оболочки и давлениями на ее поверхностях.

Деформации, наблюдаемые при проведении эксперимента, оцениваются как разность деформаций, рассчитанных на основе модели в нагруженном состоянии при избыточном давлении на внутренней поверхности сосуда, и деформаций, получаемых с помощью модели при нагрузке только атмосферного давления. Формула для расчета вектора деформаций под действием разницы давлений Δp_i имеет вид

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{rr}^* \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{(R_o^2 - R_i^2)} \begin{bmatrix} (1-2\nu) & -1 \\ (1-2\nu) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i^2 \\ R_i^2 \cdot R_o^2 \cdot r^{-2} \end{bmatrix} \Delta p_i, \quad (25)$$

где ε_{rr}^* и $\varepsilon_{\varphi\varphi}^*$ – компоненты радиальной и угловой деформаций оболочки под действием избыточного давлением Δp_i на внутренней поверхности сосуда. Давление на внутренней поверхности p_i поддерживается равным сумме давления на внешней поверхности p_o и избыточного давления Δp_i :

$$p_i = p_o + \Delta p_i. \quad (26)$$

Записанное выражение для деформаций растяжения–сжатия упругой модели (25) имеет классическую форму деформаций цилиндрического сосуда, согласно которой деформации растяжения–сжатия пропорциональны разнице давлений на внутренней и наружной поверхностях модели сосуда.

Результаты моделирования упругих свойств артерии

Для демонстрации особенностей и эффектов, полученных на основе модели упругого цилиндрического сосуда, в работе произведены расчеты для сонной артерии. При моделировании использованы типичные параметры для артерии [5]: диаметр сосуда – 25 мм, 8,2 мм и 4,15 мм; толщина сосуда – 0,4 мм, 0,16 мм и 0,12 мм; модуль нормальной упругости E для стенки – 0,9 МПа; коэффициент Пуассона 0,35; внутреннее избыточное давление – 2,4·9,6 кПа, допустимые напряжения – 0,93 МПа. При моделировании учитывается, что параметры сонной артерии полученные при нормальном атмосферном давлении равном $1,014 \cdot 10^{-5}$ Па.

Поскольку размеры оболочки были измерены при атмосферном давлении, то собственные геометрические размеры модели определены через размеры оболочки, на которую воздействует нормальное атмосферное давление. Для определения собственных геометрических размеров модели используется преобразование координат (24) для точек нагруженного и ненагруженного сосуда. Значения собственных внутреннего R_0 и внешнего R_i радиусов для модели сонной артерии приняты равными 1,77 мм и 2,14 мм соответственно. Собственные параметры модели являются основными при определении перемещений точек, деформаций и напряжений оболочки. Характерные результаты расчета перемещений точек u_r упругих оболочек в зависимости от давления, действующим на внутреннюю поверхность оболочки при избыточном давлении Δp_i в 9,6 кПа, показан на рис. 2,а где линия 1 и линия 2 соответствуют перемещениям точек, расположенным на внутренней и наружной поверхностях модели. Пунктирные линии иллюстрируют перемещениям точек при избыточном давлении Δp_i в 16,2 кПа, характерного для систолы. Из графиков зависимостей перемещений на рис. 2 можно видеть, что перемещения точек оболочки при нормальном давлении составило 1,5...2 мм, что сопоставимо с собственными радиусами цилиндрической модели. Изменение геометрических размеров артерии в зависимости от внешнего давления иллюстрирует рис. 2,б, где изменения внешнего и внутреннего радиусов сосуда показано линиями 1 и 2 соответственно. Увеличение геометрических размеров происходит за счет уменьшения толщины стенок сосуда h (линия 3). Так как деформация – это важнейшая характеристика упругой оболочки, то для наложения ограничений на область допустимых геометрических размеров оболочки задан диапазон возможных деформаций состояния упругой обмотки равным 20 %. Это соответствует изменениям, при которых проявляется нелинейное увеличение модуля упругости для коллагеновых волокон приблизительно на порядок. Характерный пример деформаций, рассчитанных с помощью модели упругого цилиндрического сосуда для сонной артерии, показан на рис. 3, где цифрами обозначены: 1 и 2 – радиальная и угловая компоненты деформации наружной поверхности оболочки; 3 и 4 – радиальная и угловая компоненты деформации внутренней поверхности оболочки.

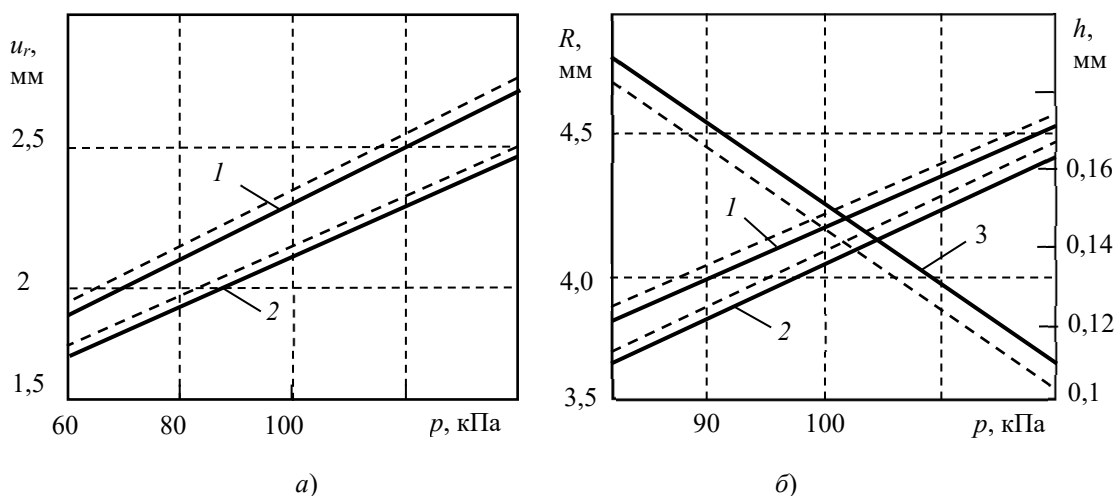


Рис. 2. Графики зависимости перемещений точек упругой артерии от изменения внешнего давления при избыточном давлении на внутренней поверхности в 9,6 кПа (сплошная линия) и в 16,2 кПа (пунктирная линия).

Образование тканей биологических объектов происходит при атмосферных давлениях. В этих условиях формируется оболочка, содержащая молекулярные структуры волокон коллагена и эластина, которая постоянно компенсирует внешнее давление в 1 атм. Особенность структуры состоит в том, что ее упругая деформация находится в области, где свойства оболочки изменяются относительно устойчивого состояния. В этой области структура обладает минимальным значением модуля упругости, которое проявляется при исследовании упругих свойств тканей. Пунктирные линии иллюстрируют смещение компонент деформации во время систолы. Избыточное систолическое давление принято равным 16,2 кПа [17].

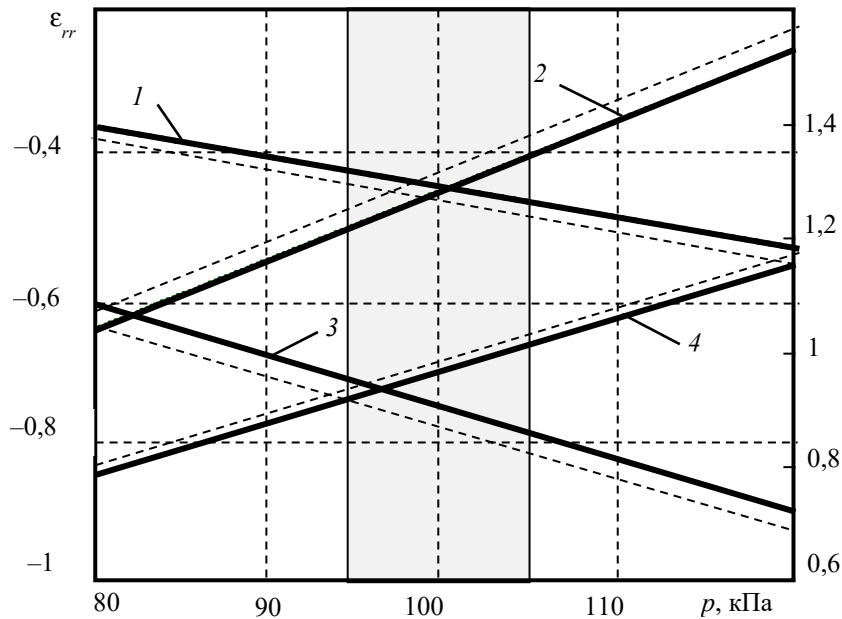


Рис. 3. Радиальные и угловые компоненты деформации на внутренней и наружной поверхностях модели сонной артерии

При деформации сосудистой оболочки происходит смещение коллагеновых волокон относительно их устойчивого состояния. В результате смещения коллагеновых волокон при деформации сосудистых оболочек на 20 % происходит увеличение модуля упругости на порядок, что накладывает ограничения на область возможных деформаций стенок артерий и сосудов [18]. В этой связи на применение модели упругого цилиндрического сосуда наложено ограничение, согласно которому для практических целей имеет значение только область деформаций оболочки вблизи состояния равновесия, при котором деформации не превышают 5 %. На рис. 3 выделена область допустимых деформаций серым цветом. В этой области изменения параметров модели пренебрежимо малы.

Заключение

Очевидно, что при наличии давления на внешней и внутренней поверхности цилиндрического сосуда наблюдаются два эффекта. Первый эффект состоит в том, что ткани сосуда испытывают объемное сжатие, что приводит к сжатию оболочки сосуда по толщине. Второй эффект состоит в том, что для толстостенного сосуда площади внутренней и наружной поверхностей сосуда различны, что приводит к смещению тканей в результате его сжатия из-за разности суммарных внешних сил. Эффекты проявляются как для сжимаемой, так и несжимаемой по объему оболочки. Коэффициент Пуассона ν принят равным 0,35 и 0,5 при моделировании сжимаемой и несжимаемой оболочки, соответственно.

Для иллюстрации эффектов были получены выражения (21) и (22) для смещения точек внешней и внутренней поверхности сосуда и для деформации материалов под действием давлений на внешней и внутренней поверхностях модели. Если в модели принять внутренний и внешний радиусы оболочки равными, т.е. неразличимыми при измерении, то решения не существует. Толщина оболочки стремится к нулю $h \rightarrow 0$ при условии, что радиус оболочки стремится к бесконечности: $R_i \rightarrow \infty$. При любой

конечной толщине оболочки и равенстве внутреннего и внешнего радиусов нарушена осевая симметрия модели. В этом случае для анализа поведения оболочки следует отказаться от условия радиальной симметрии и использовать другую модель, к примеру, модель плоскости.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что на измерения артериального давления могут оказывать серьезное влияние нелинейные свойства модуля упругости оболочки артерии в моделях исследования при трансмуральном взаимодействии, основанном на использовании окклюзивной манжеты. В этой связи перспективными являются исследования, связанные с установлением влияния на оболочку артерии внешнего давления с учетом нелинейности модуля упругости ее стенок.

Список литературы

1. Jordan D., Marshall J. CNS integration of cardiovascular regulation // *Cardiovascular Regulation*. London : Portland Press on behalf of the Physiological Society, 1995. P. 1–14.
2. O'Brien E., Petrie J., Littler W. et al. The British Hypertension Society protocol for the evaluation of automated and semi-automated blood pressure measuring devices with special reference to ambulatory systems // *Journal of hypertension*. 1990. № 8. P. 607–619. PMID: 216845
3. Пат. 2652070, МПК А61В 5/0225. Электронный тонометр / Геращенко С. И., Геращенко М. С. № 2017117129 ; заявл. 16.05.2017 ; зарег. 24.04.2018.
4. Виноградов Г. Б., Малкин А. Я. Реология полимеров. М. : Химия, 1977. 440 с.
5. Бегун П. И., Афонин П. Н. Моделирование в биомеханике. М. : Высш. шк., 2004. 390 с.
6. Wang Jia-Jung, Liu Shing-Hong, Lin Chin-Teng, Hsieh Jui-Hsaing. Modeling the Arterial Unloaded Situation in Oscillometric Blood Pressure Waveform Measurement Using Fuzzy Logic Control // *Journal of Medical and Biological Engineering*. 2001. Vol. 21. P. 93–104.
7. Komine H., Asai Y., Yokoi T., Yoshizawa M. Non-invasive assessment of arterial stiffness using oscillometric blood pressure measurement // *BioMedical Engineering OnLine*. 2012. № 11. URL: <http://www.biomedical-engineering-online.com/content/11/1/6>
8. Forouzanfar M., Dajani H. R., Groza V. Z. et al. Oscillometric Blood Pressure Estimation: Past, Present, and Future // *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*. 2015. Vol. 8. P. 44–63.
9. Liu Yi, Dang C., Garcia M. et al. Surrounding tissues affect the passive mechanics of the vessel wall: theory and experiment // *Am J Physiol Heart Circ Physiol*. 2007. № 293. H3290–H3300. doi: 10.1152/ajpheart.00666.2007
10. Lan H., Al-Jumaily A. M., Lowe A., Hing W. Effect of tissue mechanical properties on cuff-based blood pressure measurements // *Medical Engineering & Physics*. 2011. Vol. 33. P. 1287–1292.
11. Горшков А. Г., Старовойский Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластичных элементов конструкции. М. : Физматлит, 2005. 576 с.
12. Бузухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М. : Высш. шк., 1961. 532 с.
13. Теребушко О. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Наука, 1984. 320 с.
14. Самуль В. И. Основы теории упругости и пластичности. М. : Высш. шк., 1982. 264.
15. Вардаян Г. С., Андреев В. И., Атаров Н. М., Горшков А. А. Соппротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. М. : Изд-во АСБ, 1995. 568 с.
16. Волкова Н. А. Алгоритм диагностики состояния сердечно-сосудистой системы по результатам многократных измерений артериального давления и пульса // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки*. 2015. № 1. С. 43–49.
17. Геращенко С. И., Геращенко С. М., Костенков С. Ю. [и др.]. Препарирование изображений процесса формирования костного регенерата при настройке сканирующих электронных микроскопов // *Надежность и качество сложных систем*. 2016. № 4. С. 82–91. doi: 10.21685/2307-4205-2016-4-12
18. Люминарский И. Е., Люминарская Е. С. Динамическая модель микропереключателей с упругими стержневыми элементами // *Надежность и качество сложных систем*. 2016. № 4. С. 35–42. doi: 10.21685/2307-4205-2016-4-5

References

1. Jordan D., Marshall J. CNS integration of cardiovascular regulation. *Cardiovascular Regulation*. London: Portland Press on behalf of the Physiological Society, 1995:1–14.
2. O'Brien E., Petrie J., Littler W. et al. The British Hypertension Society protocol for the evaluation of automated and semi-automated blood pressure measuring devices with special reference to ambulatory systems. *Journal of hypertension*. 1990;(8):607–619. PMID: 216845
3. Pat. 2652070, МПК А61В 5/0225. Electronic tonometer. Gerashchenko S.I., Gerashchenko M.S. № 2017117129; appl. 16.05.2017; reg. 24.04.2018. (In Russ.)
4. Vinogradov G.B., Malkin A.Ya. *Reologiya polimerov = Rheology of polymers*. Moscow: Khimiya, 1977:440. (In Russ.)

5. Begun P.I., Afonin P.N. *Modelirovanie v biomekhanike = Modeling in biomechanics*. Moscow: Vyssh. shk., 2004:390. (In Russ.)
6. Wang Jia-Jung, Liu Shing-Hong, Lin Chin-Teng, Hsieh Jui-Hsaing. Modeling the Arterial Unloaded Situation in Oscillometric Blood Pressure Waveform Measurement Using Fuzzy Logic Control. *Journal of Medical and Biological Engineering*. 2001;21:93–104.
7. Komine N., Asai Y., Yokoi T., Yoshizawa M. Non-invasive assessment of arterial stiffness using oscillometric blood pressure measurement. *BioMedical Engineering OnLine*. 2012;(11). Available at: <http://www.biomedical-engineering-online.com/content/11/1/6>
8. Forouzanfar M., Dajani H.R., Groza V.Z. et al. Oscillometric Blood Pressure Estimation: Past, Present, and Future. *IEEE Reviews in Biomedical Engineering*. 2015;8:44–63.
9. Liu Yi, Dang C., Garcia M. et al. Surrounding tissues affect the passive mechanics of the vessel wall: theory and experiment. *Am J Physiol Heart Circ Physiol*. 2007;(293):H3290–H3300. doi: 10.1152/ajpheart.00666.2007
10. Lan H., Al-Jumaily A.M., Lowe A., Hing W. Effect of tissue mechanical properties on cuff-based blood pressure measurements. *Medical Engineering & Physics*. 2011;33:1287–1292.
11. Gorshkov A.G., Starovoyskiy E.I., Yarovaya A.V. *Mekhanika sloistykh vyazkouprugoplastichnykh elementov konstruksii = Mechanics of layered viscoelastic structural elements*. Moscow: Fizmatlit, 2005:576. (In Russ.)
12. Buzukhov N.I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti = Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep*. Moscow: Vyssh. shk., 1961:532. (In Russ.)
13. Terebushko O.I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti = Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity*. Moscow: Nauka, 1984:320. (In Russ.)
14. Samul' V.I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti = Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity*. Moscow: Vyssh. shk., 1982:264. (In Russ.)
15. Vardayan G.S., Andreev V.I., Atarov N.M., Gorshkov A.A. *Soprotivlenie materialov s osnovami teorii uprugosti i plastichnosti = Resistance of materials with the basics of the theory of elasticity and plasticity*. Moscow: Izd-vo ASB, 1995:568. (In Russ.)
16. Volkova N.A. Algorithm for diagnosing the state of the cardiovascular system based on the results of multiple measurements of blood pressure and pulse. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskies nauki = News of higher educational institutions. Volga region. Technical sciences*. 2015;(1):43–49. (In Russ.)
17. Gerashchenko S.I., Gerashchenko S.M., Kostenkov S.Yu. et al. Preparation of images of the process of bone regenerate formation when setting up scanning electron microscopes. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2016;(4):82–91. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2016-4-12
18. Lyuminarskiy I.E., Lyuminarskaya E.S. Dynamic model of microswitches with elastic rod elements. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system = Reliability and quality of complex systems*. 2016;(4):35–42. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2016-4-5

Информация об авторах / Information about the authors

Виталий Германович Полосин

доктор технических наук, доцент, профессор кафедры
медицинской кибернетики и информатики,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: mro@list.ru

Сергей Иванович Геращенко

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой медицинской
кибернетики и информатики,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: mro@list.ru

Михаил Сергеевич Геращенко

старший преподаватель кафедры медицинской
кибернетики и информатики,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: mro@list.ru

Vitaliy G. Polosin

Doctor of technical sciences, associate professor,
professor of the sub-department
of medical cybernetics and computer science,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Sergey I. Gerashchenko

Doctor of technical sciences, professor,
head of the sub-department
of medical cybernetics and computer science,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Mikhail S. Gerashchenko

Senior lecturer of the sub-department
of medical cybernetics and computer science,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Оксана Евгеньевна Безбородова

кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой техносферной безопасности,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: ot@pnzgu.ru

Oksana E. Bezborodova

Candidate of technical sciences, associate professor,
head of the sub-department of technosphere safety,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.**

Поступила в редакцию/Received 21.07.2023

Поступила после рецензирования/Revised 22.08.2023

Принята к публикации/Accepted 21.09.2023