

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ, НЕ ДАВШИХ ОТКАЗЫ

В. С. Михайлов

В современном производстве высоконадежных, уникальных, сложных изделий стала обычной ситуация, в которой необходимо получить оценку вероятности безотказной работы (ВБР) на основе испытаний, не давших отказов. При этом обычно используют план испытаний типа NBT , где N – число испытываемых однотипных изделий; T – наработка (одинаковая для каждого изделия); B – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается [1]. При условии подчинения наработки до отказа экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 (средняя наработка до отказа), расчетное значение ВБР (далее – $P_0(t)$) за заданное время (t) будет определяться равенством

$$P_0(t) = e^{-\left(\frac{t}{T_0}\right)}. \quad (1)$$

В качестве оценки ВБР за заданное время t (далее – $P(t)$) плана испытаний NBT можно выбрать несмещенную оценку [1], а именно:

$$P(t) = \left(1 - \frac{t}{NT}\right)^r, \text{ при } \frac{t}{NT} < 1; P(t) = 0, \text{ при } \frac{t}{NT} \geq 1, \quad (2)$$

где r – число отказов.

Для случая, когда $r = 0$, формула (2) дает результат равный единице. Такое событие называют достоверным. Однако этот результат противоречит здравому смыслу. Таким образом, формула (2) не позволяет оценивать ВБР по результатам испытаний, не давших отказы.

Естественно, что в качестве оценки ВБР следует рассматривать и оценки, получаемые из формулы (1), если в качестве параметра T_0 подставить его эффективную оценку, построенную на достаточно широком классе смещенных оценок. В этом случае для плана испытаний типа NBT в качестве оценки параметра T_0 (средней наработки до отказа) следует использовать эффективную оценку T_{01} из [2], построенную для экспоненциального распределения. Для безотказных испытаний оценку T_{01} можно применять и для плана типа NBT . Представим эту составную оценку T_{01} в виде

$$T_{01} = 2NT, \text{ при } r = 0 \text{ и } T_{01} = \frac{NT}{r+1}, \text{ при } r > 0.$$

Тогда предлагаемая оценка ВБР для плана испытаний типа NBT (далее – $R(t)$) после подстановки T_{01} в формулу (1) выразится в виде

$$R(t) = e^{-t/2NT}, \text{ при } r = 0 \text{ и } R(t) = e^{-t(r+1)/2NT}, \text{ при } r > 0. \quad (3)$$

Вполне естественным будет, если в качестве оценки параметра T_0 воспользоваться традиционной оценкой средней наработки до отказа, построенной для экспоненциального распределения [1, 2]:

$$T_{02} = \frac{NT}{r}, \text{ при } r > 0.$$

Доопределим оценку T_{02} для случая $r = 0$ величиной « $2NT$ », тогда оценка ВБР примет вид

$$F(t) = e^{(-t/2NT)}, \text{ при } r = 0 \text{ и } F(t) = e^{(-t \times r/2NT)}, \text{ при } r > 0. \quad (4)$$

Таким образом, все предлагаемые оценки, выражаемые формулами (2)–(4), могут быть сравнимы и в случае, когда $r = 0$.

В случае безотказных испытаний становится весьма соблазнительным использование оценок (3) и (4), так как эти оценки дают возможность характеризовать ВБР величиной отличной от нуля и единицы.

Целью статьи является нахождение инструмента, который позволит объективно судить (с точки зрения эффективности предложенных оценок) предложенные возможности оценивать ВБР величиной отличной от нуля и единицы по результатам испытаний, не давших отказы.

Заметим, что представленные формулами (2)–(4) оценки обладают свойством состоятельности, т.е. с ростом числа отказов эти оценки достаточно быстро (асимптотически) сходятся к $P_0(t)$. Поэтому при $r > 3$ эффективность оценок, представленных формулами (2)–(4), практически одинакова.

В качестве инструмента для нахождения эффективной оценки будем использовать интегральные характеристики [3]. Аналогично [3] построим функционал (далее – $A(f)$), в основе которого лежит суммарный квадрат отклонения ожидаемой реализации оценки ВБР ($f(t, NT, r): P(t, NT, r), R(t, NT, r), F(t, NT, r)$) для всех возможных значений T_0 , t и NT :

$$A(f) = \int_0^\infty \int \int \{Ef(t, z, r) - P_0(t, T_0)\}^2 \partial \Delta \partial z \partial t, \quad (5)$$

где $Ef(t, z, r)$ – математическое ожидание предложенной оценки. Переменная z принимает все возможные значения NT , через Δ обозначен пуассоновский поток отказов с параметром NT/T_0 [1], $T_0 = NT/\Delta$. Воспользовавшись свойствами пуассоновского потока с параметром Δ [1], найдем

$$Ef(t, z, r) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t, z, k) e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!}. \quad (6)$$

Эффективная оценка ВБР из трех предложенных должна обладать минимальной величиной функционала $A(f)$.

Заметим, что в теории реализация несмещенной оценки ВБР $P(t, z, r)$ на функционале $A(P(t, z, r))$ дает величину равную нулю. Этот факт следует непосредственно после подстановки несмещенной оценки $P(t, z, r)$ в функционал.

Также заметим, что реализация оценок $R(t, NT, r)$ и $F(t, NT, r)$ на функционале $A(f)$ дает величину равную бесконечности.

Переопределим функционал $A(f)$ таким образом, чтобы его реализация после подстановок, предложенных оценок давала конечную величину. Для этого формулу (5) представим в виде

$$A(f) = \sum_{t=100}^{1E+05} \frac{1}{\text{КолШаг}(t)} \left\{ \sum_{z=1000}^{1E+16} \frac{1}{\text{КолШаг}(z)} \left(\int_0^{60} \{Ef(t, z, r) - P_0(t, T_0)\}^2 \partial \Delta \right) \right\}. \quad (7)$$

Первые два интеграла заменены на усредненные значения слагаемых величин, что гарантирует получение конечной величины реализации функционала. Количество шагов (КолШаг(t), КолШаг(z)) суммирования зависит от пределов и шага суммирования.

Следует заметить, что расчет $Ef(t, z, r)$ (см. формулу (6)) является чрезвычайно коварным и ограничен представлением вещественной переменной в вычислительной машине (числом зна-

ков после запятой). Это объясняется тем, что приходится умножать и делить числа, значительно превышающие $1E + 15$, $1E + 30$, $1E + 300$. Расчет проводился при следующих ограничениях:

- величина t варьировалась от 100 до 100 000 ч с шагом 1000;
- величина Δ варьировалась от 0 до 60 (исключаем числа значительно превышающие $1E + 15$) ч с переменным шагом;
- величина NT варьировалась от 1000 до $1E + 16$ ч с переменным шагом;
- максимальная величина индекса k ограничивалась условием $f(t, z, k)e^{-\Delta} \frac{\Delta^k}{k!} < 1E - 12$;
- величины $t/NT > 0,99999999$ исключались из расчета для адекватного сравнения оценок (далее – с ограничением), так как это ограничение следует непосредственно из формулы (2).

Сами ограничения соответствовали жизненным ситуациям. О точности вычисления можно судить по реализации оценки $P(t, z, r)$ на функционале $A(f)$, которая всегда должна быть равной нулю. Изменение ограничений в сторону их увеличения приводит к изменению результата функционала, но не меняет сути вещей. Оценка точности вычисления внутреннего интеграла $\left(\int_0^{60} \{Ef(t, z, r) - P_0(t, T_0)\}^2 \partial\Delta \right)$ производилась по контрольному варианту с заранее известной величиной и соответствовала четвертому знаку после запятой.

Результаты расчета функционала $A(f)$ для различных оценок ($P(t, NT, r)$, $R(t, NT, r)$, $F(t, NT, r)$) сведены в табл. 1.

Таблица 1

Δ	$A(P(t))$ – с ограничением	$A(R(t))$ – с ограничением	$A(F(t))$ – с ограничением	$A(R(t))$	$A(F(t))$
$\Delta < 61$	7,8E-30	0,0066	0,0036	0,0440	0,0410
$1,1 < \Delta < 61$	7,7E-30	0,0034	0,0022	0,0049	0,0037
$0,9 < \Delta \leq 1,1$	6,7E-33	0,00033	8,8E-06	0,0013	0,0012
$\Delta \leq 0,9$	9,0E-32	0,0028	0,0014	0,0376	0,0362

Из табл. 1 следует, что самой эффективной оценкой ВБР является не смещенная оценка $P(t)$, для всех возможных значений параметров T_0 , t и NT – как и следовало ожидать. Из табл. 1 также следует, что для всех тех вариантов плана испытаний NBT , которые не позволяют воспользоваться оценкой $P(t)$ (из-за ограничения $t/NT > 0,99999999$), в качестве оценки ВБР следует пользоваться оценкой $F(t)$.

Когда для испытаний, не давших отказы, появляется необходимость характеризовать ВБР величиной отличной от нуля и единицы, то эффективной оценкой в этом случае служит построенная оценка $F(t)$.

Пример 1. По результатам безотказных испытаний 100 изделий в течение 1000 ч необходимо сделать оценку ВБР за $t = 1000$ ч и сравнить полученные результаты с теоритической оценкой для различных вариантов параметра T_0 : $T_0 = 1E + 4$, $T_0 = 1E + 5$, $T_0 = 1E + 6$, $T_0 = 1E + 7$, $T_0 = 1E + 8$, $T_0 = 1E + 9$. Результаты расчетов сведены в табл. 2.

Таблица 2

t/NT	$P(t)$	$F(t)$	$P_0(t, T_0)$, $T_0 = 1E + 4$	$P_0(t, T_0)$, $T_0 = 1E + 5$	$P_0(t, T_0)$, $T_0 = 1E + 6$	$P_0(t, T_0)$, $T_0 = 1E + 7$	$P_0(t, T_0)$, $T_0 = 1E + 8$	$P_0(t, T_0)$, $T_0 = 1E + 9$
0,01	1	0,995	0,9048	0,99005	0,999	0,9999	0,99999	0,999999

Пример 2. По результатам безотказных испытаний 10 изделий в течение 1000 ч необходимо сделать оценку ВБР за $t = 1000$ ч и сравнить полученные результаты с теоритической оценкой для

различных вариантов параметра T_0 : $T_0 = 1E + 4$, $T_0 = 1E + 5$, $T_0 = 1E + 6$, $T_0 = 1E + 7$, $T_0 = 1E + 8$, $T_0 = 1E + 9$. Результаты расчетов сведены в табл. 3.

Таблица 3

t/NT	$P(t)$	$F(t)$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 4$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 5$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 6$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 7$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 8$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 9$
0,1	1	0,9512	0,9048	0,99005	0,999	0,9999	0,99999	0,999999

Пример 3. По результатам безотказных испытаний двух изделий в течение 1000 ч необходимо сделать оценку ВБР за $t = 1000$ ч и сравнить полученные результаты с теоритической оценкой для различных вариантов параметра T_0 : $T_0 = 1E + 4$, $T_0 = 1E + 5$, $T_0 = 1E + 6$, $T_0 = 1E + 7$, $T_0 = 1E + 8$, $T_0 = 1E + 9$. Результаты расчетов сведены в табл. 4.

Таблица 4

t/NT	$P(t)$	$F(t)$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 4$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 5$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 6$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 7$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 8$	$P_0(t, T_0),$ $T_0 = 1E + 9$
0,5	1	0,7788	0,9048	0,99005	0,999	0,9999	0,99999	0,999999

Из табл. 2–4 следует, что для высоконадежных современных изделий, которые были подвергнуты испытаниям, не давшим отказы, оценка ВБР – $P(t)$, равная единице, является предпочтительней $F(t)$, так как находится ближе к истинному значению, чем результат оценки $F(t)$.

Выводы

1. Для всех вариантов плана испытаний NBT , которые не позволяют воспользоваться оценкой $P(t)$ (из-за ограничения $t/NT > 0,99999999$), в качестве оценки ВБР следует пользоваться оценкой $F(t)$.

2. Когда для испытаний, не давших отказы, появляется необходимость характеризовать ВБР величиной отличной от нуля и единицы, то эффективной оценкой в этом случае служит построенная оценка $F(t)$. Однако для высоконадежных современных изделий, которые были подвергнуты испытаниям, не давшим отказы, оценка ВБР – $P(t)$, равная единице ($1 = 0,999...9...$), является предпочтительней $F(t)$, так как находится ближе к истинному значению, чем результат оценки $F(t)$.

Библиографический список

- Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
- ГОСТ Р 50779.26–2007. Статистические методы. Точечные оценки, доверительные, предикционные и толерантные интервалы для экспоненциального распределения.
- Михайлов, В. С. Нахождение эффективной оценки средней наработки на отказ / В. С. Михайлов // Надежность. – 2016. – Т. 16, № 4. – С. 40–42.

Михайлов Виктор Сергеевич

ведущий инженер,
Центральный научно-исследовательский институт
химии и механики им. Д. И. Менделеева
(115487, Россия, г. Москва, ул. Нагатинская, д. 16а)
E-mail: Mvs1956@list.ru

Mikhaylov Viktor Sergeevich

lead engineer,
Central Research Institute of Chemistry and Mechanics
named after D. I. Mendeleev
(115487, 16a Nagatinskaya street, Moscow, Russia)

Аннотация. В современном производстве высоконадежных, уникальных, сложных изделий стала обычной ситуация, в которой необходимо получить оценку вероятности безотказной работы (ВБР) на основе испытаний, не давших отказов. При этом обычно используют план испытаний типа *NBT*, где N – число испытываемых однотипных изделий; T – наработка (одинаковая для каждого изделия); B – характеристика плана, означающая, что работоспособность изделия после каждого отказа в течение срока испытаний восстанавливается. При условии подчинения наработки до отказа экспоненциальному закону распределения с параметром T_0 (средняя наработка до отказа) расчетное значение ВБР за заданное время (t) будет определяться равенством $P_0(t, T_0) = \exp(-t/T_0)$. Целью статьи является нахождение инструмента, который позволит объективно судить (с точки зрения эффективности предложенных оценок) предложенные возможности оценивать ВБР величиной отличной от нуля и единицы по результатам испытаний, не давших отказы. **Методы.** Для нахождения эффективной оценки использовались интегральные характеристики, а именно: суммарный квадрат отклонения ожидаемой реализации некоторого варианта оценки от всевозможных значений $P_0(t, T_0)$ по различным потокам отказов совокупности испытываемых изделий. **Результаты и выводы.** 1. Для всех вариантов плана испытаний *NBT*, которые не позволяют воспользоваться оценкой $P(t)$ (из-за ограничения $t/NT > 0,99999999$), в качестве оценки ВБР следует пользоваться оценкой $F(t)$. 2. Когда для испытаний, не давших отказы, появляется необходимость характеризовать ВБР величиной отличной от нуля и единицы, то эффективной оценкой в этом случае служит построенная оценка $F(t)$. Однако для высоконадежных современных изделий, которые были подвергнуты испытаниям, не давшим отказы, оценка ВБР – $P(t)$, равная единице ($1 = 0,999...9...$), является предпочтительней $F(t)$, так как находится ближе к истинному значению, чем результат оценки $F(t)$.

Ключевые слова: средняя наработка до отказа, вероятность безотказной работы, экспоненциальное распределение, план испытаний, точечная оценка.

УДК 621.382.029.6

Михайлов, В. С.

Оценка вероятности безотказной работы по результатам испытаний, не давших отказы / В. С. Михайлов // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 2 (18). – С. 56–60. DOI 10.21685/2307-4205-2017-2-8.

Abstract. In the modern production of highly reliable, unique, complex products, the usual situation in which it is necessary to obtain an estimate of the probability of failure-free operation (PFO) based on tests that did not give failures has become. In this case, a test plan of type *NBT* is usually used, where N is the number of subjects of the same type; T – operating time (the same for each product); B – the characteristic of the plan, meaning that the working capacity of the product after each failure during the test period is restored. If the operating time is obeyed to the exponential distribution law with the parameter T_0 (mean time to failure), the calculated value of the PFO for a given time (t) will be determined by the equality $P_0(t, T_0) = \exp(-t/T_0)$. The purpose of the article is to find a tool that will objectively judge (from the point of view of the effectiveness of the proposed evaluations) the proposed possibilities to estimate the PFO value different from zero and one by the results of tests that did not fail. **Methods.** To find an effective estimate, we used integral characteristics, namely, the total square of the deviation of the expected realization of a certain valuation variant from all possible values of $P_0(t, T_0)$ for different failure flows of the set of products tested. **Results and conclusions.** For all variants of the *NBT* test plan, which do not allow the use of the $P(t)$ estimate (due to the restriction $t/NT > 0.99999999$), an estimate of $F(t)$ should be used to estimate PFO. When it becomes necessary to characterize PFO by a value different from zero and one by the results of non-failure tests, then the estimate $F(t)$ in this case is an effective estimate. However, for highly reliable modern products that have been subjected to trouble-free testing, an PFO estimate of $P(t)$ equal to one ($1 = 0.999...9...$) is preferable to $F(t)$, because it is closer to the true value than the result of the estimate of $F(t)$.

Key words: mean operating time to failure, probability of failure-free operation, exponential distribution, test plan, point estimates.