УДК 62.192

DOI 10.21685/2307-4205-2017-1-11

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ ПРОСТЕЙШИХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСА[1]

Г. С. Садыхов, В. П. Савченко

Проблема оценки остаточного ресурса является необходимо актуальной в процессе эксплуатации сложных технических систем. Для определения интенсивности отказов используется метод, основанный на оценке количества безотказных срабатываний изделия. При этом необходимо оценить объем выборки изделия для проведения ресурсных цикловых испытаний.

Пусть ξ – количество безотказных срабатываний изделия. Примером срабатываний могут быть операция «включена» радиоэлектронная аппаратура в работу и операция «выключена» из нее, операции «сжатие» и «разжатие» для поршневых насосов, операция «коммутации» для коммутаторов сигналов, операция «переключение» для переключателей и т. д.

Для изделия, работающего в дискретном режиме применения, интенсивностью отказов при *n*-ом срабатывании называют величину, определяемую по следующей формуле [1]:

$$\lambda_n = \frac{Pr(\xi = n)}{Pr(\xi \geq n)}, \tag{1}$$

где $Pr(.)$ – вероятность события, заключенного внутри скобок; $n = 1, 2, 3\ldots$

Из определения (1) следует, что

$$0 < \lambda_n < n. \tag{2}$$

Для сравнения приведем традиционное определение интенсивности отказов изделия в момент времени t, которое рассчитывается по формуле [2]

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\big(t < \eta < t + \Delta t \big| (\eta > t)\big)}{\Delta t}, \tag{3}$$

где $Pr\big((.)|(.)\big)$ – условная вероятность того события, что отказ произойдет внутри интервала времени $(t, t + \Delta t)$; η – наработка до отказа изделия, работающего в непрерывном режиме применения.

Заметим, что правая часть оценки (2) для показателя (3) может не выполняться. Покажем это. Пусть

$$\lambda(t) \equiv 10^{-2}\,\frac{1}{\text{ч}}.$$

Так как один месяц (м) содержит 720 часов (ч), то

$$\frac{1}{\text{ч}} = 720\,\frac{1}{\text{м}}.$$

Следовательно,

$$\lambda(t) \equiv 7{,}2\,\frac{1}{\text{м}}.$$

Видно, что $\lambda(t) > 1$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Гранты №07-08-00574-а и №10-08-00607-а).

Следует отметить, что формула (1) не вытекает из определения (3). Кроме того, выражение (1) не позволяет определить физическую размерность показателя λ_n. Для определения физической размерности запишем формулу (1) (по аналогии с (3)) в несколько другой форме, а именно:

$$\lambda_n = \frac{\Pr((n \le \zeta < n+1) \,|\, (\zeta \ge n))}{(n+1)-n} . \tag{4}$$

Поскольку

$$\Pr((n \le \zeta < n+1) \,|\, (\zeta \ge n)) = \frac{\Pr(\zeta = n)}{\Pr(\zeta \ge n)} ,$$

то из формулы (4) следует (1).

Выражение (4) полезно тем, что оно позволяет определить физическую размерность показателя λ_n, которая равна $1/\text{ср}$, где ср – срабатывание. Для сравнения, как это следует из (3), размерность $\lambda(t)$ равна 1/вр , где вр – время.

Влияние принимаемых значений интенсивностей отказов (1) и (3) на характеристики надежности изделий исследованы в работах [3–8].

Простейшая модель расходования дискретного ресурса

Пусть вероятность того, что каждое срабатывание изделия будет безотказно, равна p $(0 < p < 1)$. Тогда вероятность отказа изделия при n-м срабатывании согласно теореме умножения независимых событий равна

$$\Pr(\zeta = n) = p^{n-1} q , \tag{5}$$

где $q = 1 - p,\ \ n = 1, 2, ...$.

Поскольку выражение (5) – это общий член геометрической прогрессии $q,\ pq,\ ...,\ p^{n-1}q,\ ...$, то модель распределения дискретного ресурса (5) называют геометрическим законом.

Легко заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(\zeta = n) = 1 \ .$$

Следовательно, принимаемые значения $\zeta = 1,\ \zeta = 2,\ ...,\ \zeta = n,\ ...$ как события образуют полную группу.

Докажем следующий критерий.

Теорема 1. Для того, чтобы модель расходования дискретного ресурса подчинялась геометрическому закону (5), необходимо и достаточно, чтобы интенсивность отказов при всех срабатываниях удовлетворяла условию

$$\lambda_n \equiv q , \tag{6}$$

где $n = 1,\ 2,\ ...$.

Доказательство. Докажем необходимость условия (6) для закона (5).

Используя (5), имеем

$$\Pr(\zeta \ge n) = \sum_{m=n}^{\infty} p^{m-1} q \ .$$

Суммируя правую часть как геометрическую прогрессию, найдем

$$\Pr(\zeta \ge n) = p^{n-1} .$$

Следовательно, согласно (1) с учетом (5), получим

$$\lambda_n \equiv q, \quad (n = 1,\ 2,\ ...\ ) ,$$

что доказывает необходимость условия (6) для модели расходования дискретного ресурса (5).

Докажем достаточность условия, а именно: из условия (6) следует, что закон распределения дискретного ресурса имеет вид (5).

Используя (1), найдем

$$1-\lambda_n = \frac{\Pr(\zeta \ge n+1)}{\Pr(\zeta \ge n)}, \quad (n=1,\ 2,\ \dots\ ).$$

Полагая

$$R_m = \Pr(\zeta \ge m+1), \tag{7}$$

с учетом (6) имеем

$$1-q = \frac{R_n}{R_{n-1}},$$

откуда получим следующую рекуррентную формулу:

$$R_n = pR_{n-1}, \quad (n=1,\ 2,\ \dots\ ). \tag{8}$$

Поскольку согласно (7)

$$R_0 = 1,$$

то, используя (8), получим

$$R_1 = p,\ R_2 = pR_1,\ \dots,\ R_n = pR_{n-1},\ \dots\ .$$

Учитывая в каждом последующем выражении предыдущее соотношение, найдем

$$R_n = p^n, \quad (n=1,\ 2,\ \dots\ ). \tag{9}$$

Так как

$$\Pr(\zeta = n) = R_{n-1} - R_n,$$

то с учетом (9) имеем

$$\Pr(\zeta = n) = p^{n-1}q, \quad (n=1,\ 2,\ \dots\ ),$$

что доказывает достаточность условия (6).

Рассмотрим еще одно простейшее распределение в классе непрерывных распределений безотказных наработок.

Простейшая модель расходования непрерывного ресурса

Пусть $\lambda > 0$ – постоянная. Как известно, экспоненциальным называют распределение вероятностей значений безотказных наработок, если плотность распределения равна

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \tag{10}$$

где $t > 0$ – время.

Установим следующий критерий.

Теорема 2. Для того, чтобы модель расходования непрерывного ресурса подчинялась экспоненциальному закону (10), необходимо и достаточно, чтобы интенсивность отказов была бы тождественна постоянной и удовлетворяла условию

$$\lambda(t) \equiv \lambda. \tag{11}$$

Доказательство. Так как вероятность безотказной работы изделия в течение времени *t* рассчитывается по формуле [2]

$$p(t) = \int_t^{\infty} f(u)du \,, \tag{12}$$

то с учетом (10) получим

$$p(t) = e^{-\lambda t} \,.$$

Подставляя полученное в формулу для интенсивности отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{p(t)} \,,$$

найдем

$$\lambda(t) \equiv \lambda \,,$$

что и доказывает необходимость условия (11).

Для доказательства достаточности условия (11) заметим, что [2]

$$p(t) = \exp(-\int_0^t \lambda(u)du) \,.$$

Подставляя (11) в эту формулу, имеем

$$p(t) = \exp(-\lambda t) \,,$$

откуда найдем согласно (12)

$$f(t) = -p'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \,,$$

что доказывает достаточность условия (11).

Таким образом, доказаны критерии проверки простейших законов распределения ресурса.

Достижимая оценка среднего дискретного ресурса изделия

Пусть $m = 0, 1, 2, \ldots$ – целые числа и γ – заданное число $(0 < \gamma < 1)$. Под гамма-процентным дискретным ресурсом будем понимать такое наибольшее значение $m = m_\gamma$, которое определяется из следующего неравенства:

$$R_m \geq \gamma \,,$$

где

$$R_m = Pr(\xi \geq m+1), \tag{13}$$

здесь R_m – вероятность безотказной работы изделия в результате срабатываний в количестве m [1]; $Pr(\cdot)$ – вероятность события, содержащегося внутри скобок; ξ – число срабатываний изделия (типа «включение» изделия в работу или «выключение» из нее) до отказа.

Иными словами, показатель m_γ определяется из следующего соотношения:

$$m_\gamma = \max\{m | R_m \geq \gamma\}. \tag{14}$$

Заметим, что в некоторых случаях уровень γ задают в процентах, тогда вероятность R_m тоже следует выражать в процентах.

Заданное значение γ для показателя m_γ позволяет планировать объем выборки изделий для проведения ресурсных циклических испытаний. Так, например, минимальный объем выборки при $\gamma = 0,9$ (до наблюдения первого отказавшего изделия в результате срабатываний «включено» изделие в работу или «выключено» из нее) равен 10.

В общем случае минимальный объем выборки для проведения ресурсных испытаний до появления первого отказавшего изделия при срабатывании «включено/выключено» рассчитывается по формуле

$$n = \left[\frac{1}{1-\gamma}\right], \tag{15}$$

где [.] – целая часть выражения, стоящего внутри скобок.

Формула (15) вытекает из следующей точечной оценки гамма-процентного дискретного ресурса при одном отказавшем изделии в выборке объемом n:

$$\frac{n-1}{n} = \gamma. \tag{16}$$

Решая уравнение (16) относительно n при заданном значении γ, получим формулу (15).

Наряду с показателем m_γ для оценки дискретного ресурса используется показатель «средний дискретный ресурс» r, который рассчитывается по формуле

$$r = E(\xi),$$

где E(.) – математическое ожидание величины, стоящей внутри; ξ – число срабатываний (типа «включено/выключено») до отказа.

Возникает вопрос: как связаны между собой показатели m_γ и r? Ответом на этот вопрос служит следующее соотношение, установленное нами:

$$[r] = m_{R_{[r]}}, \tag{17}$$

где

$$R_{[r]} = Pr(\xi \geq [r]+1)$$

вероятность безотказной работы изделия в результате срабатываний в количестве $[r]$ ([.] – обозначение целой части).

Из (17) видно, что при больших значениях r уровень γ, равный $R_{[r]}$, мал. Следовательно, использовать показатель m_γ для оценки среднего дискретного ресурса крайне затруднительно, поскольку потребуется большой объем выборки, чтобы в ней получить долю отказавших изделий, равной $1-R_{[r]}$. Поясним это на примере.

Пусть закон распределения вероятностей для конкретного ресурса имеет следующие значения:

$$\xi : \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ q & pq & p^2q \end{matrix},$$

где 1, 2, 3, … – принимаемые значения срабатываний до отказа, $q = 1-p$ – вероятность отказа изделия при каждом срабатывании $(0 < q < 1)$.

Тогда [9]

$$R_{[r]} = p^{[r]},$$

где $r = 1/q$. Поскольку

$$\lim_{q\to 0}(1-)^{1/q} = e^{-1}\ 0{,}37,$$

то

$$\lim_{q\to 0} R_{[r]} ;\ 0{,}37.$$

Следовательно, для оценки среднего дискретного ресурса согласно (17) при малых значениях q необходим такой объем выборки, в котором 63 % изделий будут доведены до отказа при срабатываниях «включено/выключено», поскольку

$$1 - 0{,}37 = 0{,}63.$$

Очевидно, что минимальный объем выборки в этом случае равен 100 изделиям, но такой большой объем ресурсных испытаний не всегда возможно осуществить.

Поэтому возникает вопрос: каким же образом можно оценить средний дискретный ресурс на ранних стадиях ресурсных испытаний изделий?

Ответ на этот вопрос дает следующая достижимая оценка, полученная нами:

$$r \geq \gamma\left(m_\gamma + 1\right). \tag{18}$$

Для доказательства (18) воспользуемся формулой [10]

$$r = \sum_{m=0}^{\infty} R_m,$$

где R_m – вероятности, определяемые соотношениями (13). Откуда получим

$$r \geq \sum_{m=0}^{m_\gamma} R_m. \tag{19}$$

Согласно определению показателя «гамма-процентный дискретный ресурс» (2) при всех целых $m \leq m_\gamma$ имеем

$$R_m \geq \gamma$$

Учитывая эту оценку в (19), найдем искомую оценку (6).

Покажем, что оценка (18) достижима, т.е. существует хотя бы один закон распределения дискретного ресурса, для которого левая и правая части (18) равны, а именно:

$$r = \gamma\left(m_\gamma + 1\right).$$

Для этой цели рассмотрим следующий закон срабатываний изделий до отказа:

$$\xi: \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{matrix}.$$

Видно, что

$$r = 1{,}5; \quad m_{0,5} = 2.$$

Тогда правая часть (18) при $\gamma = 0{,}5$ равна 1,5, что совпадает со значением левой части, равной также 1,5.

Таким образом, оценка (18) достижима.

Заметим, что для непрерывного ресурса имеем следующую оценку для среднего ресурса R [10]:

$$R > \gamma t_\gamma, \tag{8}$$

где t_γ – гамма-процентный ресурс, определяемый из уравнения

$$P(t) = \gamma$$

как решение относительно t, $\left(t = t_\gamma\right)$ при заданном значении $\gamma, \left(0 < \gamma < 1\right)$, здесь $P(t)$ – вероятность безотказной работы изделия в течение времени t .

Показано, что оценка (8) не является достижимой [11, 12]. Другими словами, в классе изделий с непрерывным ресурсом отсутствует закон распределения безотказных наработок до отказа, для которого правая часть (8) равна левой.

Таким образом, установлена достижимая оценка среднего дискретного ресурса, позволяющая на ранних стадиях ресурсных испытаний проводить оценку среднего дискретного ресурса для любого закона распределения срабатываний изделия до отказа.

Библиографический список

1. Sadykhov, G. S. Average number of failure-free operations up to critical failure of a technologically dangerous facility: Calculation, limit and non-parametric-estimates / G. S. Sadykhov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2013. – Vol. 42, Iss. 1. – P 81–88.
2. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М. : URSS, 2013. – 584с.
3. Sadikhov, G. S. Technical condition control calculation for hazardous industrial facilities / G. S. Sadykhov // Journaljf Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Vol. 43, Iss. 4. – P. 327–332.
4. Садыхов, Г. С. Непараметрические оценки и предельные значения вероятностей опасных и безопасных состояний техногенно-опасного объекта / Г. С. Садыхов, И. А. Бабаев // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2015. – № 3. – С. 128–134.
5. Sadikhov, G. S. Nonparametric Assessments and Limiting Probability Value of the Hazardous and Safe States of a Technogenic-Hazardous Object / G. S. Sadikhov, I. A. Babaev // Journal of the Machinery Manufacture and Reliability. – 2015. – Vol. 44, № 3. – P. 298–304.
6. Садыхов, Г. С. Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники / Г. С. Садыхов, В. П. Савченко, Н. И. Сидняев. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 382 с.
7. Информационная технология многофакторного обеспечения надежности сложных электронных систем / Н. К. Юрков, А. В. Затылкин, С. Н. Полесский, И. А. Иванов, А. В. Лысенко // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 4. – С. 74–79.
8. Садыхов, Г. С. К проблеме оценки средней наработки до критического отказа техногенно-опасного объекта / Г. С. Садыхов, В. П. Савченко // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 1. – С. 59–61.
9. Садыхов, Г. С. Гамма-процентные показатели эксплуатационной надежности и их свойства / Г. С. Садыхов // Известия АН СССР. Сер. : Техническая кибернетика. – 1983. – № 6. – С. 185–187.
10. Садыхов, Г. С. Расчет показателей контроля технического состояния техногенно-опасного объекта / Г. С. Садыхов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – № 4. – С. 120–126.

Садыхов Гулам Садыхович
доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник,
действительный член Академии проблем качества РФ,
Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
(105005, Россия, г. Москва,
ул. 2-я Бауманская, 5, стр. 1)
E-mail: gsadykhov@gmail.com

Sadykhov Gulam Sadykhovich
doctor of technical science, professor, chief researcher,
fellow of Russian Federation Quality Problems academy,
Bauman Moscow State Technical University
(105005, p. 1, 5 2-nd Baumanskaya street, Moscow,
Russia)

Савченко Владимир Петрович
доктор технических наук, профессор,
генеральный директор Радиотехнического
института им. академика Л. А. Минца
(127083, Россия, г. Москва, ул. 8 Марта, 10, стр. 1)
E-mail:savchenko@rti-mints.ru

Savchenko Vladimir Petrovich
doctor of technical sciences, professor, CEO,
Joint Stock Company «Academician A. L. Mints
Radiotechnical Institute»
(127083, p. 1, 10 8 March street, Moscow, Russia)

Аннотация. Доказываются необходимые и достаточные условия для проверки простейших законов распределения ресурса. Доказана достижимая оценка среднего дискретного ресурса, позволяющая на ранних стадиях ресурсных испытаний проводить оценку дискретного ресурса для любого закона распределения срабатываний изделия до отказа.

Abstract. The work proves necessary and sufficient conditions for testing the simplest laws of resource distribution. An achievable estimate of the mean discrete resource is proved, which allows estimating a discrete resource for any law of distribution of product releases to failure in the early stages of resource tests.

Ключевые слова: количество безотказных срабатываний, вероятность безотказных срабатываний, интенсивность отказов при срабатываниию.

Key words: the number of fail-safe operations, the probability of failure-free operation, the intensity of failures when triggered.

УДК 62.192

Садыхов, Г. С.

Критерии проверки простейших законов распределения ресурса / Г. С. Садыхов, В.П. Савченко // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 1 (17). – С. 85–92. DOI 10.21685/2307-4205-2017-1-11.