

Г. С. Садыхов

ПЛАНИРОВАНИЕ РЕСУРСНЫХ ИСПЫТАНИЙ¹

G. S. Sadykhov

PLANNING RESOURCE TEST

Аннотация. Актуальность и цели. Работа посвящена планированию ресурсных испытаний однотипных объектов с целью определения минимального количества этих объектов и минимальной продолжительности этих испытаний в зависимости от оценки нижней доверительной границы усеченного среднего ресурса. **Материалы и методы.** Ряд ограничительных условий, например, связанных с проведением дополнительных испытаний сверх назначенных сроков использования, не позволяет воспользоваться существующими как параметрическими, так и непараметрическими методами расчета указанных величин. Поэтому в работе найдены принципиально новые решения, не требующие дополнительных испытаний сверх назначенного срока эксплуатации. Доказаны формулы расчета минимального объема выборки и минимальной продолжительности ресурсных испытаний. **Результаты.** Результаты работы используются при планировании ресурсных испытаний изделий радиоэлектроники новых видов. **Выводы.** Доказаны формулы расчета минимального количества объектов $N = n_0$ и минимальной продолжительности испытаний $T = t_0$ в зависимости от оценки нижней доверительной границы усеченного среднего ресурса при заданной доверительной вероятности.

Ключевые слова: ресурсные испытания, средний ресурс, продолжительность испытаний.

Abstract. *Background.* The work is devoted to the planning of resource tests of similar objects in order to determine the minimum number of these objects and the minimum duration of these tests, depending on the assessment of the lower confidence limit of the truncated mean resource. *Materials and methods.* A number of restrictive conditions, for example, connected with carrying out additional tests beyond the prescribed terms of use, do not allow using existing both parametric and nonparametric methods for calculating these values. Therefore, fundamentally new solutions have been found in the work that do not require additional tests beyond the prescribed lifetime. The formulas for calculating the minimum sample size and the minimum duration of resource tests are proved. *Results.* The results of the work are used in the planning of resource tests of radio electronics products of new types. *Conclusions.* The formulas for calculating the minimum number of objects and the minimum test duration are proved, depending on the estimation of the lower confidence limit of the truncated mean resource for a given confidence probability.

Key words: useful life tests, mean life, duration of tests.

Постановка задачи

При планировании ресурсных испытаний по планам вида $\{NUT\}$ необходимо определить минимальное количество однотипных объектов $N = n_0$ и минимальную продолжительность испытаний $T = t_0$. Для решения этой задачи используют параметрические [1–8] и непараметрические [9–17] методы. Если параметрические методы требуют информации о виде закона распределения наработок до первого отказа объекта, то непараметрические методы позволяют оценить показатели ресурса при отсутствии этих законов. Однако они используют информацию более общего характера, например, о принадлежности исследуемых объектов к классу объектов, у которых интенсивность отказов монотонно растет как функция времени. Чтобы определить, к какому классу принадлежат исследуемые объекты, необходимо провести дополнительные исследования и ресурсные испытания сверх времени t_0 . В связи с этим возникает задача, как обосновать минимальное количество однотипных

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 07-08-00574-а, № 10-08-00607-а).

объектов и минимальную длительность ресурсных испытаний для произвольного закона безотказных наработок без проведения дополнительных исследований и испытаний.

Решению этой задачи посвящена настоящая работа.

1. Усеченный средний ресурс

Известно, что средний ресурс рассчитывается по формуле [18]

$$R = \int_0^{\infty} P(x) dx,$$

где $P(x)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени x . Рассмотрим следующий показатель:

$$R_t = \int_0^t P(x) dx, \tag{1}$$

который назовем усеченным средним ресурсом, поскольку

$$R_t \leq R.$$

В работе [6] доказана следующая формула:

$$E(R_t^{(n)}) = K_n(\tau) R_t(\tau),$$

где $E(R_t^{(n)})$ – математическое ожидание величины, стоящей внутри скобок;

$$R_t(\tau) = \frac{1}{P(\tau)} \int_0^t P(\tau + x) dx;$$

$$K_n(\tau) = 1 - (1 - P(\tau))^n;$$

$$R_t^{(n)}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{n-k} \left(\sum_{i=1}^m z_i + (n-k-m)t \right), & \text{если } k \neq n; \\ 0, & \text{если } k = n; \end{cases}$$

здесь k – число отказавших объектов в течение времени τ из всех наблюдаемых в количестве n , z_i – наработка i -го отказавшего объекта на интервале времени $(\tau, \tau + t)$ из числа m всех отказавших объектов на этом интервале.

Полагая в этих формулах $\tau = 0$, получим

$$E(R_t^{(n)}) = R_t, \tag{2}$$

где показатель R_t определен формулой (1)

$$R_t^{(n)} = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^m z_i + (n-k)t \right) - \tag{3}$$

точечная оценка показателя R_t .

Другими словами, точечная оценка (3) показателя (1) несмещенная.

Этот вывод важен, поскольку число m и наработки z_i отказавших объектов внутри интервала наблюдения $(0, t)$ случайные величины, следовательно, точечная оценка (3) может иметь систематические (с избытком или недостатком) смещения относительно истинного значения показателя R_t .

Определим надежностный смысл показателя (1).

Введем следующую цензурированную сверху (справа) случайную величину $\zeta(t)$, которая равна безотказной наработке объекта, равной z , если отказ произошел на интервале наблюдения $(0, t)$, либо продолжительности наблюдения t , если отказа там не наблюдалось, т.е.

$$\zeta(t) = \begin{cases} z, & \text{если } z \in (0, t); \\ t & \text{иначе.} \end{cases} \quad (4)$$

Функция распределения случайной величины (4) имеет следующий вид:

$$F_{\zeta}(x) = \begin{cases} F(x), & \text{если } x < t; \\ P(t) & \text{иначе,} \end{cases} \quad (5)$$

где $F(x)$ – функция распределения безотказной наработки объекта. Видно, что функция (5) разрывна в точке $x = t$, при этом верхняя строка (4) соответствует непрерывной части смешанной случайной величины (4), а нижняя – дискретной части.

Поскольку

$$\int_0^t P(x) dx = tP(t) + \int_0^t xf(x) dx,$$

где $f(x) = -P'(x)$ – плотность распределения безотказной наработки, то согласно (1)

$$R_t = tP(t) + \int_0^t xf(x) dx. \quad (6)$$

Легко заметить, что правая часть (6) равна математическому ожиданию величины (4). Следовательно,

$$R_t = E(\zeta(t)). \quad (7)$$

Таким образом, надежностный смысл показателя (1) – это среднее значение безотказной наработки объекта в течение времени наблюдения t .

Из формулы (7) следует оценка

$$R_t \leq t,$$

причем оценка достижима тогда и только тогда, когда у объекта отсутствует отказ в течение времени наблюдения t .

Аналогичная оценка справедлива и для точечной оценки (3), а именно:

$$R_t^{(n)} \leq t. \quad (8)$$

Наконец, заметим, что формула (7) позволяет обосновать точечную оценку (3), полученную ранее с другой стороны, а именно: как среднее значение безотказных наработок n объектов в течение времени t .

2. Состоятельность точечной оценки (3)

Докажем, что оценка (3) состоятельна, т.е.

$$R_t^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{всп.}} R_t. \quad (9)$$

Другими словами, надо доказать, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\left|R_t^{(n)} - R_t\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad (10)$$

где $\Pr\left(\left|R_t^{(n)} - R_t\right| < \varepsilon\right)$ – вероятность события, заключенного внутри скобок.

Было бы ошибочным на основании (9) сделать заключение, что с ростом n точечная оценка (3) стремится к R_t , т.е. из соотношения (9) не вытекает следующий предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_t^{(n)} = R_t.$$

Различие между указанными видами сходимости состоит в следующем: если $R_t^{(n)}$ стремится при $n \rightarrow \infty$ к R_t как пределу, в смысле обычного математического анализа, то начиная с некоторого $n > N$, выполняется неравенство

$$|R_t^{(n)} - R_t| < \varepsilon;$$

если же $R_t^{(n)}$ стремится по вероятности к R_t , то для отдельных значений n это неравенство может не выполняться, однако при $n \rightarrow \infty$ вероятность события

$$|R_t^{(n)} - R_t| \geq \varepsilon$$

стремится к нулю.

Таким образом, соотношение (9) утверждает, что при $n \rightarrow \infty$ точечная оценка (3) стремится по вероятности к R_t и, следовательно, обладает свойством устойчивости при больших n .

Для доказательства (10) найдем верхнюю оценку дисперсии, смешанной (непрерывной и дискретной) случайной величины (3). В связи с этим воспользуемся следующим соотношением для дисперсии [6]:

$$D(R_t^{(n)}) = \frac{1}{n} \left\{ \left[\int_0^t u^2 f(u) du - \left(\int_0^t u f(u) du \right)^2 \right] + t^2 F(t) P(t) - 2tP(t) \int_0^t u f(u) du \right\}. \quad (11)$$

Поскольку для безотказной наработки z внутри интервала $(0, t)$ имеем

$$E(z) = \frac{1}{F(t)} \int_0^t u f(u) du, \quad E(z^2) = \frac{1}{F(t)} \int_0^t u^2 f(u) du,$$

то согласно (11) получим

$$D(R_t^{(n)}) = \frac{F(t)}{n} [E(z^2) - F(t)E^2(z) + t^2P(t) - 2tP(t)E(z)].$$

Далее, преобразуя правую часть, найдем

$$D(R_t^{(n)}) = \frac{F(t)}{n} [D(z) + P(t)(t - E(z))^2]. \quad (12)$$

Согласно свойству дисперсии имеем

$$D(z) \leq E\left(z - \frac{t}{2}\right)^2.$$

Учитывая оценку

$$z - \frac{t}{2} < \frac{t}{2},$$

получим

$$D(z) < \frac{t^2}{4}.$$

Используя полученную оценку в (12), найдем

$$D(R_i^{(n)}) < \frac{F(t)}{n} \left[\frac{t^2}{4} + P(t)(t - E(z))^2 \right].$$

Так как

$$t - E(z) < t,$$

то

$$D(R_i^{(n)}) < \frac{5t^2}{4n}. \tag{13}$$

Далее воспользуемся неравенством Чебышева [19] для случайной величины $R_i^{(n)}$:

$$\Pr\left(\left|R_i^{(n)} - E(R_i^{(n)})\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(R_i^{(n)})}{\varepsilon^2},$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное число.

Учитывая (2) и оценку (13), имеем

$$\Pr\left(\left|R_i^{(n)} - R_i\right| \geq \varepsilon\right) < \frac{5t^2}{4n\varepsilon^2}.$$

Перейдя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(\left|R_i^{(n)} - R_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

откуда следует (10), что доказывает (9) и тем самым – состоятельность оценки (3).

3. Нижняя доверительная граница усеченного среднего ресурса

При малых объемах наблюдения за однотипными объектами степень доверия к точечной оценке (3) показателя R_i , как выяснилось выше, крайне низка. Поэтому установим нижнюю доверительную границу показателя (1) при заданной доверительной вероятности, свободную от этого недостатка.

Для этой цели воспользуемся неравенством Сельбера [20] для случайной величины X

$$\Pr(X \leq E(X) + \beta) \geq \frac{\beta^2}{\beta^2 + D(X)}, \tag{14}$$

где $\beta > 0$ – произвольное число.

Полагая в (14) $X = R_i^{(n)}$, с учетом формулы (2), получим

$$\Pr(R_i \geq R_i^{(n)} - \beta) \geq \frac{\beta^2}{\beta^2 + D(R_i^{(n)})}.$$

Используя оценку (13), находим

$$\Pr(R_i \geq R_i^{(n)} - \beta) > \frac{4n\beta^2}{4n\beta^2 + 5t^2}.$$

Приравняв правую часть наперед заданному значению доверительной вероятности p , получим

$$\beta = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{5p}{n(1-p)}}.$$

Следовательно,

$$\Pr(R_t \geq \underline{R}_t^{(n)}) > p,$$

где

$$\underline{R}_t^{(n)} = R_t - \frac{t}{2} \sqrt{\frac{5p}{n(1-p)}} \quad (15)$$

нижняя доверительная граница усеченного среднего ресурса.

Видно, что при $p \rightarrow 0$, имеем

$$\underline{R}_t^{(n)} \rightarrow R_t^{(n)}.$$

Другими словами, точечная оценка показателя (1) является пределом нижней доверительной границы при стремлении доверительной вероятности к нулю. Поэтому доверие к точечной оценке (3) крайне низко. Однако это доверие повышается при $n \rightarrow \infty$.

4. Планирование необходимого количества объектов для проведения ресурсных испытаний

Формула (15) доказана в предположении, что задано количество однотипных объектов n , наблюдаемых в течение времени t . Пусть теперь, напротив, задана следующая оценка нижней доверительной границы показателя (1):

$$\underline{R}_t^{(n)} \geq r, \quad (16)$$

где $r < t$ и надо найти минимальное количество однотипных объектов n_0 планируемых для проведения ресурсных испытаний в течение времени t .

Докажем, что такое количество объектов определяется по формуле

$$n_0 = \min \left\{ n \mid n \geq \frac{5p}{4(1-p)} \left(\frac{t}{t-r} \right)^2 \right\}. \quad (17)$$

Для доказательства воспользуемся формулой (15), из которой найдем

$$n = \frac{5p}{4(1-p)} \left(\frac{t}{R_t^{(n)} - \underline{R}_t^{(n)}} \right)^2.$$

Используя оценки (8) и (16), получим

$$n \geq \frac{5p}{4(1-p)} \left(\frac{t}{t-r} \right)^2.$$

Отсюда найдем искомую формулу (17).

Заметим, что установленная формула (17) справедлива для любого закона распределения безотказных наработок объекта.

Из формулы (17) следует, что при небольших уровнях доверительной вероятности p количество объектов, планируемых для проведения ресурсных испытаний, сокращается и, напротив, возрастает для значений вероятности p , близких к единице.

Аналогичный вывод (из формулы (17)) можно сделать и о количестве планируемых объектов для проведения ресурсных испытаний в зависимости от принимаемых значений r , ($0 < r < t$), а именно: минимальное количество объектов для проведения ресурсных испытаний мало при малых значениях r и, напротив, возрастает при r близких к значению t .

Наконец, отметим, что минимальное количество планируемых объектов согласно формуле (17) сокращается с увеличением длительности проведения испытаний t и, напротив, увеличивается при уменьшении длительности испытаний.

Все выводы, сделанные из формулы (17), хорошо согласуются с логикой проведения ресурсных испытаний.

Пример. Найти минимальное количество однотипных объектов для проведения ресурсных испытаний в течение 6000 ч при условии, что нижняя доверительная граница усеченного среднего ресурса при доверительной вероятности, равной 0,8, не менее 1000 ч.

Решение. Согласно условиям примера имеем $t = 6000$ ч; $p = 0,8$; $r = 1000$ ч.

Тогда

$$\frac{5p}{4(1-p)} \left(\frac{t}{t-r} \right)^2 = \frac{5 \cdot 0,8}{4 \cdot 0,2} \left(\frac{6000}{6000-1000} \right)^2 = 7,2.$$

Следовательно, минимальное количество однотипных объектов, необходимых для проведения ресурсных испытаний в течение времени 6000 ч, согласно формуле (17) равно 8.

5. Планирование минимальной продолжительности времени проведения ресурсных испытаний

При организации ресурсных испытаний важную роль играет планирование минимальной продолжительности времени испытаний.

В связи с этим установим следующую формулу для планирования минимальной продолжительности времени при проведении ресурсных испытаний:

$$t_0 = \frac{r}{1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5p}{n(1-p)}}}, \tag{18}$$

где n – количество испытываемых однотипных объектов, удовлетворяющих условию

$$n > \frac{5p}{4(1-p)}; \tag{19}$$

p – доверительная вероятность нижней доверительной границы показателя (1); r – заданное значение ($0 < r < t$) в оценке (16).

Для доказательства (18) воспользуемся формулой (15), из которой получим

$$R_t^{(n)} - \underline{R}_t^{(n)} = \frac{t}{2} \sqrt{\frac{5p}{n(1-p)}}.$$

Используя оценки (8) и (16), имеем

$$t - r \geq \frac{t}{2} \sqrt{\frac{5p}{n(1-p)}}.$$

Следовательно,

$$t \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5p}{n(1-p)}} \right) \geq r.$$

Так как при условии (19) второй сомножитель положителен, то

$$t > \frac{r}{1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5p}{n(1-p)}}},$$

что доказывает формулу (18).

Доказанная формула пригодна для любого закона распределения безотказных наработок объекта.

Нетрудно убедиться в том, что с увеличением значений доверительной вероятности p согласно формуле (18) увеличивается длительность планируемых ресурсных испытаний и, напротив, длительность ресурсных испытаний уменьшается с уменьшением значений p .

Кроме того, из формулы (18) видно, что минимальная продолжительность планируемых ресурсных испытаний увеличивается с уменьшением количества однотипных объектов n и, напротив, продолжительность ресурсных испытаний уменьшается с увеличением значений n .

Пример. Найти минимальную продолжительность проведения ресурсных испытаний девяти однотипных объектов при условии, что нижняя доверительная граница усеченного среднего ресурса при доверительной вероятности, равной 0,8, не менее 1500 ч.

Решение. Согласно условиям примера имеем $n = 9$; $p = 0,8$; $r = 1500$ ч.

Так как

$$9 > \frac{5 \cdot 0,8}{4(1-0,8)} = 5,$$

то выполняется условие (19).

Следовательно, по формуле (18) находим минимальную продолжительность проведения ресурсных испытаний, равной

$$t_0 = \frac{1500}{1 - \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 0,8}} = 5769,2 \text{ ч.}$$

Заключение

Таким образом, для проведения ресурсных испытаний однотипных объектов по плану $\{NUT\}$, законы распределения безотказных наработок которых до первого отказа произвольны, доказаны формулы расчета минимального количества объектов $N = n_0$ и минимальной продолжительности испытаний $T = t_0$ в зависимости от оценки нижней доверительной границы усеченного среднего ресурса при заданной доверительной вероятности.

Библиографический список

1. *Судаков, Р. С.* Испытания систем: выбор объемов и продолжительности / Р. С. Судаков. – М. : Машиностроение, 1988. – 455 с.
2. *Переверзев, Е. С.* Надежность и испытания технических систем / Е. С. Переверзев. – Киев : Наукова думка, 2009. – 328 с.
3. *Герасимов, О. Н.* Способ организации производственного контроля и диагностики РЭС с заданным уравнением остаточного ресурса / О. Н. Герасимов, А. В. Затылкин, Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2016. – № 1 (13). – С. 94–98.
4. *Гласко, А. В.* Определение минимального объема выборки респондентов для проведения социологического исследования / А. В. Гласко, Л. Г. Садыхова // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2012. – № 7. – С. 116–124.
5. *Садыхов, Г. С.* Зависимость показателей ресурса от характеристик его расходования / Г. С. Садыхов, В. П. Савченко // Доклады РАН. – 1998. – Т. 361, № 2. – С. 189–191.
6. *Садыхов, Г. С.* Модели и методы оценки остаточного ресурса изделий радиоэлектроники / Г. С. Садыхов, В. П. Савченко, Н. И. Сидняев. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2015. – 382 с.
7. *Баранов, Н. А.* Методы анализа функциональной безопасности сложных технических систем / Н. А. Баранов, Л. И. Турчак. – М. : ВЦ РАН, 2006. – 186 с.
8. *Sadykhov, G. S.* Technical Condition Control Calculation for Hazardous Industrial Facilities / G. S. Sadykhov // Journal of Machinery Manufactures and Reliability. – 2014. – Vol. 43. – P. 327–332.
9. *Димитриенко, Ю. И.* Прогнозирование долговечности и надежности элементов конструкций высокого давления / Ю. И. Димитриенко, Ю. В. Юрин, С. В. Европин // Известия вузов. Машиностроение. – 2013. – № 11. – С. 3–11.
10. *Gamiz, M. Z.* Non-parametric Estimation of the Availability in a General Repairable System / M. Z. Gamiz, Y. G. Roman // Reliability Engineering and System Safety. – 2008. – Vol. 93, iss. 8. – P. 1188–1196.
11. *Sadykhov, G. S.* Computation of the Least Number of Objects Necessary for the Cyclical Reliability Testing / G. S. Sadykhov, I. A. Babaev // Journal of Machinery Manufactures and Reliability. – 2016. – Vol. 45, № 3. – P. 239–246.
12. *Беляев, Ю. К.* Непараметрические методы в задачах обработки результатов испытаний и эксплуатации / Ю. К. Беляев. – М. : Знание, 1984. – 65 с.

13. Садыхов, Г. С. Непараметрические и предельные оценки длительности безопасного срока эксплуатации техногенно-опасных объектов / Г. С. Садыхов, О. В. Некрасова // Труды Ин-та системного анализа РАН. – М., 2010. – Т. 53, вып. 14. – С. 191–198.
14. Садыхов, Г. С. Средняя наработка до критического отказа техногенно-опасного объекта: предельные и непараметрические оценки / Г. С. Садыхов, О. В. Елисеева, И. А. Бабаев // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2012. – № 3. – С. 37–46.
15. Sadykhov, G. S. Average Number of Failure-Free Operations up to Critical Failure of Technologically Dangerous Facility: Calculation, Limit and Non-parametric Estimates / G. S. Sadykhov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2013. – Vol. 43, № 1. – P. 81–88.
16. Садыхов, Г. С. Средняя доля остаточного ресурса и ее непараметрические оценки / Г. С. Садыхов, В. П. Савченко // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. Вычислительный центр РАН. – 2005. – Вып. 1. – С. 65–72.
17. Sadykhov, G. S. Non-parametric Assessment and Limiting Probability Values of the Hazardous and Safe States of a Technogenic-Hazardous Object / G. S. Sadykhov, I. A. Babaev // Journal of Machinery Manufactures and Reliability. – 2015. – Vol. 44, № 3. – P. 298–304.
18. ГОСТ Р 27.002–2009. Надежность в технике. Термины и определения. – М. : Стандартинформ, 2011. – 32 с.
19. Гнеденко, Б. В. Математические методы теории надежности и их статистический анализ / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М. : URSS, 2013. – 584 с.
20. Selberg, H. L. On an Inequality in Mathematical Statistics / H. L. Selberg // Norsk. Mat. Tidsskr. – 2005. – № 24. – P. 1–12.

Садыхов Гулам Садыхович

доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник,
Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
(105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5, стр. 1)
E-mail: gsadykhov@gmail.com

Sadykhov Goulam Sadykhovich

doctor of technical sciences, professor,
chief research scientist,
Bauman Moscow State Technical University
(105005, 5/1, 2-ya Baumanskaya st., Moscow, Russia)

УДК 62.192**Садыхов, Г. С.**

Планирование ресурсных испытаний / Г. С. Садыхов // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 2 (22). – С. 80–88. – DOI 10.21685/2307-4205-2018-2-11