УДК 519. 2

# ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ОДНОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ НАДЕЖНОСТИ РАДИОЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ

Д. Ю. Муромцев, Ю. Т. Зырянов, И. Г. Рязанов

***Введение***

Проектирование и производство радиоэлектронных средств (РЭС) предполагает получение информации о надежности на всех стадиях жизненного цикла – от начала проектирования до изготовления в серийном производстве и последующей эксплуатацией. Существенная роль отводится испытаниям и мониторингу технического состояния РЭС в процессе эксплуатации. Результаты испытаний являются основой принятия решений по использованию РЭС, усовершенствованию конструкции и технологии изготовления [1–2].

В теории вероятностей при решении целого ряда практических задач, например, при контроле уровня надежности РЭС, приходится сталкиваться со схемой испытаний Бернулли [3–5]. Производится $N$ независимых испытаний, в результате каждого из которых наступает либо событие $A$ с вероятностью $p$ либо противоположное ему событие $C$ с вероятностью $(1 - p)$. Двум случайным исходам каждого испытания обычно сопоставляют дискретную случайную величину, принимающую одно из двух значений: 1, если произошло событие $A$, и 0, если произошло событие $C$. Эти исходы также называют «успехом» и «неудачей».

Вероятность $P_A(k)$ того, что событие $A$ при $N$ испытаниях наступит ровно $k$ раз ($k = 1, 2, \ldots, N$), определяется по формуле Бернулли [3–5]

$$P_A(k) = \frac{N!}{(N-k)!k!} p^k (1-p)^{N-k}, \tag{1}$$

представляющей собой биномиальное распределение. При $N = 1$ оно преобразуется в распределение Бернулли. В работе [6] показано, что двумерное биномиальное распределение и его характеристическая функция определяются соответственно выражениями

$$P(k, l) = \frac{N!}{(N-k-l)!k!l!} (1-p_1-p_2)^{N-k-l} p_1^k p_2^l, \tag{2}$$

$$\theta_N(j\vartheta_1, j\vartheta_2) = \left[ (1-p_1-p_2) + p_1 \exp(j\vartheta_1) + p_2 \exp(j\vartheta_2) \right]^N. \tag{3}$$

Если событию $C$ сопоставить случайную величину, принимающую вместо 0 значение 1, то распределение (1) после некоторых преобразований примет следующий вид:

$$P(k) = \frac{N!}{[(N+k)/2]![(N-k)/2]!} p^{(N+k)/2} (1-p)^{(N-k)/2}, \tag{4}$$

где $k = -N, -N+2, -N+4, \ldots, N$. Данное распределение можно назвать двухсторонним, так как в нем случайные дискретные величины принимают положительные и отрицательные значения.

Если $k > 0$, то по формуле (4) можно определить вероятность $P_A(k)$ того, что событие $A$ при $N$ испытаниях наступит ровно $k$ раз. При этом полагается, что $P_A(k) = P(k)$. Если $k < 0$, то по формуле (4) можно определить вероятность $P_C(k)$ того, что событие $C$ при $N$ испытаниях наступит ровно $|k|$ раз. При этом полагается, что $P_C(k) = P(k),\ k < 0$.

Если $k = 0$ и количество испытаний является четным, то вероятность $P(0) > 0$. Ее можно также определить по формуле (4). С этой вероятностью могут произойти событие $A$ либо событие $C$ при $N$ испытаниях. Например, при двух бросаниях симметричной монеты с вероятностью 0,5 могут выпасть орел либо решка.

Для последовательности независимых испытаний с тремя и более исходами обычно рекомендуют использовать полиномиальную модель [3–6]. Однако в последние годы появился ряд публикаций, например [7, 8], в которых ставится под сомнение использование данной вероятностной модели по двум основным причинам: во-первых, каждая из составляющих (случайных величин) полиномиального распределения должна иметь биномиальное распределение, что уже при трех исходах выполняется только в частном случае; во-вторых, составляющие полиномиального распределения являются зависимыми случайными величинами, а рассматриваемые испытания являются независимыми. В работе [9] для последовательности независимых испытаний с тремя и более исходами были получены в общем виде выражения одномерных законов распределения, практическое применение которых является затруднительным [10–13].

### *Основная цель статьи*

Сформировать модели одномерных дискретных законов распределения для последовательности независимых испытаний с тремя исходами, аналогичные одностороннему распределению (1) и двухстороннему распределению (4) для последовательности независимых испытаний с двумя исходами.

### *Модель одностороннего распределения триномиального типа*

Пусть производится $N$ независимых испытаний. Каждое испытание может завершиться одним из трех исходов: наступлением события $A$ с вероятностью $p_1$ либо наступлением события $B$ с вероятностью $p_2$, либо наступлением события $C$ с вероятностью $q = 1 - p_1 - p_2$. Случайным исходам каждого испытания сопоставим дискретную случайную величину, принимающую одно из трех значений: 0, если произошло событие $C$; 1, если произошло событие $A$, и 2, если произошло событие $B$. Появление одного из положительных исходов в каждом испытании будем считать «успехом», а появление нулевого исхода – «неудачей». При этом вероятность $P(x)$ появления событий $C$, $A$ и $B$ в каждом испытании будет определяться выражением

$$P(x) = \begin{cases} q, & x = 0; \\ p_1 & x = 1; \\ p_2 & x = 2, \end{cases} \tag{5}$$

где $0 < p_1 < 1,\ 0 < p_2 < 1,\ p_1 + p_2 < 1$.

Найдем характеристическую функцию для распределения (5), используя соотношение [1–3]

$$\theta(j\vartheta) = \sum_{x=0}^{2} \exp(j\vartheta x) P(x). \tag{6}$$

Подставив в него (5), получим

$$\theta(j\vartheta) = q + p_1 \exp(j\vartheta) + p_2 \exp(2j\vartheta). \tag{7}$$

Так как проводимые испытания являются независимыми, то характеристическая функция $\theta_N(j\vartheta)$ распределения вероятностей $P(x)$ при $N$ испытаниях будет равна

$$\theta_N(j\vartheta) = \theta(j\vartheta)^N = \left[q + p_1 \exp(j\vartheta) + p_2 \exp(2j\vartheta)\right]^N, \tag{8}$$

При этом распределение вероятностей $P(x)$ при $N$ испытаниях можно определить по формуле [1–3]

$$P(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta_N(j\vartheta)\exp(-j\vartheta x)d\vartheta,\ x=0,1,\ldots,2N. \quad (9)$$

Однако значительно проще $P(x)$ определяется с использованием выражения (2) для двумерного биномиального распределения, характеристическая функция (3) которого при $\vartheta_1=\vartheta, \vartheta_2=2\vartheta$ полностью совпадает с характеристической функцией (8), т.е. искомое распределение вероятностей $P(x)$ представляет собой распределение суммы двух зависимых биномиальных случайных величин. Положим в (2) $k=x-2l$ при $x\le N$ либо $k=2N-x-2l$ при $N<x\le 2N$ и произведем суммирование по переменной $l$. В результате после некоторых преобразований получим

$$P(x)=\sum_{l=\max(0,\,N-x)}^{[N-x/2]}\frac{N!\,p_2^{x+l-N}}{(x+l-N)!}\cdot\frac{q^l p_1^{2N-x-2l}}{l!(2N-x-2l)!};\quad x=0,1,\ldots,2N. \quad (10)$$

Полученное распределение (10) можно отнести к классу одномерных распределений триномиального типа, исходя из внешнего вида характеристической функции (8), представляющей собой трином в степени $N$.

Выражение (10) можно упростить для двух частных случаев:

1. Если $p_1=2p(1-p), p_2=p^2$, то

$$P(x)=\frac{(2N)!}{(2N-x)!x!}p^x(1-p)^{2N-x},\ x=0,1,\ldots,2N. \quad (11)$$

Распределение вероятностей (11) так же, как и распределение (1), является биномиальным распределением.

2. Рассмотрим предельный случай для распределения (10), когда вероятность наступления события $B$ стремится к нулю, т.е. $p_2\to 0$. В этом случае каждое испытание будет завершаться одним из двух исходов: наступлением события $C$ с вероятностью $(1-p)$ либо события $A$ с вероятностью $p$. При этом распределение вероятностей (10) в результате предельного перехода преобразуется в биномиальное распределение (1).

Можно показать, что начальный момент 1-го порядка и центральные моменты 2-го, 3-го и 4-го порядков для распределения (10) будут определяться выражениями

$$m_1=N(p_1+2p_2);\ M_2=N\left[p_1+4p_2-(p_1+2p_2)^2\right], \quad (12)$$

$$M_3=N\left[p_1+8p_2-(p_1+2p_2)^3\right]-3M_2(p_1+2p_2), \quad (13)$$

$$M_4=N\left[p_1+16p_2-3(p_1+4p_2)^2+2(p_1+2p_2)^4\right]-4M_3(p_1+2p_2)+3M_2^2. \quad (14)$$

Вместо центральных моментов 3-го и 4-го порядков обычно используют коэффициент асимметрии $K_a$ и коэффициент эксцесса $K_e$, определяемые с помощью соотношений

$$K_a=\frac{M_3}{M_2^{1,5}};\ K_e=\frac{M_4}{M_2^2}-3. \quad (15)$$

Таким образом, число успехов $x$ в $N$ испытаниях имеет распределение (10), причем

$$x=r_1+2r_2;\quad r_0+r_1+r_2=N, \quad (16)$$

где $r_0, r_1, r_2$ – соответственно количество появлений несовместных событий *C*, *A* и *B* в *N* испытаниях; $k = 0, 1, \ldots, 2N$; $r_0 = 0, 1, \ldots, N$; $r_1 = 0, 1, \ldots, N$; $r_2 = 0, 1, \ldots, N$.

Вероятность $P(x)$ того, что событие *A* при *N* испытаниях наступит ровно $r_1$ раз, а событие *B* при *N* испытаниях наступит ровно $r_2$ раз, определяется по формуле (10) с учетом формулы (16). Так, вероятность $P(1)$ означает, что событие *A* при *N* испытаниях наступит ровно 1 раз; вероятность $P(2)$ означает, что событие *A* при *N* испытаниях наступит ровно 2 раза либо событие *B* ровно 1 раз. Вероятность $P(3)$ означает, что событие *A* при *N* испытаниях наступит ровно 3 раза либо события *A* и *B* по одному разу. Вероятность $P(2N)$ означает, что событие *B* при *N* испытаниях наступит ровно *N* раз. Вероятность $P(2N-1)$ означает, что событие *A* при *N* испытаниях наступит ровно 1 раз, а событие *B* ровно (*N* – 1) раз. Таким образом, с помощью полученного распределения (10) можно определять вероятность суммы двух несовместных случайных событий *A* и *B* при *N* испытаниях.

Вероятность $P_C$ наступления события *C* при *N* испытаниях определяется также по формуле (10). При этом полагается, что $P_C = P(0)$. Вероятность $P_C$ соответствует вероятности того, что при *N* испытаниях события *A* и *B* ни разу не наступят.

***Модель двухстороннего распределения триномиального типа***

Пусть производится *N* независимых испытаний. Каждое испытание может закончиться тремя исходами: наступлением события *A* с вероятностью $p_1$ либо наступлением события*B* с вероятностью $p_2$ либо наступлением события *C* с вероятностью $q = 1 - p_1 - p_2$. Случайным исходам каждого испытания сопоставим дискретную случайную величину, принимающую три значения: –1, если произошло событие *B*; 0, если произошло событие *C*, и 1, если произошло событие *A*. Исходы каждого испытания будем обозначать соответственно символами 1, –1 и 0. При этом вероятность $P(k)$ появления событий *A*, *B* и *C* в каждом испытании будет определяться выражением

$$P(k) = \begin{cases} p_2, & k = -1; \\ q, & k = 0; \\ p_1, & k = 1, \end{cases} \tag{17}$$

где $0 < p_1 < 1,\ 0 < p_2 < 1,\ p_1 + p_2 < 1$.

Данное распределение вероятностей, по аналогии с распределением Бернулли (2), можно назвать двухсторонним распределением Бернулли. С помощью соотношения [3]

$$\theta(j\vartheta) = \sum_{k=-1}^{1} \exp(j\vartheta k) P(k)$$

находим характеристическую функцию для распределения (17):

$$\theta(j\vartheta) = p_2 \exp(-j\vartheta) + q + p_1 \exp(j\vartheta). \tag{18}$$

Так как проводимые испытания являются независимыми, то характеристическая функция $\theta_N(j\vartheta)$ распределения вероятностей $P(k)$ при *N* испытаниях будет равна

$$\theta_N(j\vartheta) = \theta(j\vartheta)^N = \left[p_2 \exp(-j\vartheta) + q + p_1 \exp(j\vartheta)\right]^N. \tag{19}$$

При этом распределение вероятностей $P(k)$ при *N* испытаниях можно определить по формуле (9). Однако значительно проще $P(x)$ определить с использованием выражения (2) для двумерного биномиального распределения, характеристическая функция (3) которого при $\vartheta_1 = -\vartheta, \vartheta_2 = \vartheta$ полностью совпадает с характеристической функцией (19), т.е. искомое распределение вероятностей $P(x)$ представляет собой распределение разности двух зависимых биномиальных случайных величин. Положим в (2) $k = x + l$ и произведем суммирование по переменной $l$. В результате после некоторых преобразований получим

$$P(x) = \sum_{l=\max(0,\,-x)}^{[(N-x)/2]} \frac{N!\,p_2^{x+l}}{(x+l)!} \cdot \frac{q^{N-x-2l} p_1^l}{l!(N-x-2l)!}; \quad x = -N, -N+1, \ldots, N. \tag{20}$$

Полученное распределение вероятностей (20) можно назвать обобщенной формулой Бернулли либо одномерным триномиальным распределением, исходя из внешнего вида характеристической функции (19) для этого распределения. Выражение (20) можно упростить для трех частных случаев:

1. Если $p_2 = (1-p)^2$, $p_1 = p^2$, то

$$P(x) = \frac{(2N)!}{(N-x)!(N+x)!} p^{N+x} (1-p)^{N-x}, \quad x = -N, -N+1, \ldots, N. \tag{21}$$

Распределение вероятностей (21) так же, как и распределение (1), является биномиальным распределением с ненулевым параметром сдвига.

2. Рассмотрим предельный случай для распределения (20), когда вероятность наступления события *C* стремится к нулю, т.е. $(p_1 + p_2) \to 1$. В этом случае каждое испытание будет заканчиваться двумя исходами: наступлением события *B* с вероятностью $(1-p)$ либо события *A* с вероятностью $p$. Первому исходу соответствует символ –1, а второму исходу – символ 1. При этом распределение вероятностей (20) в результате предельного перехода преобразуется в распределение (4), а характеристическая функция (19) принимает вид

$$\theta_N(j\vartheta) = \left[(1-p)\exp(-j\vartheta) + p\exp(j\vartheta)\right]^N. \tag{22}$$

3. Рассмотрим второй предельный случай для распределения (20), когда вероятность наступления события *B* стремится к нулю, т.е. $p_2 \to 0$. В этом случае каждое испытание будет заканчиваться двумя исходами: наступлением события *C* с вероятностью $(1-p)$ либо события *A* с вероятностью $p$. При этом распределение вероятностей (20) в результате предельного перехода преобразуется в биномиальное распределение (1).

Начальный момент 1-го порядка и центральные моменты 2-го, 3-го и 4-го порядков для распределения (20) определяются выражениями

$$m_1 = N(p_1 - p_2); \; M_2 = N\left[p_1 + p_2 - (p_2 - p_1)^2\right]; \tag{23}$$

$$M_3 = (p_1 - p_2)\left[N - N(p_2 - p_1)^2 - 3M_2\right]; \tag{24}$$

$$M_4 = M_2\left[1 + 6(p_1 - p_2)^2\right] + 3(1 - 1/N)M_2^2 + 3N(p_1 - p_2)^2\left[(p_1 - p_2)^2 - 1\right]. \tag{25}$$

Вместо центральных моментов 3-го и 4-го порядков обычно используют коэффициент асимметрии $K_a$ и коэффициент эксцесса $K_e$, определяемые с помощью соотношений (15).

Поясним физический смысл полученного распределения (20). Как было показано выше, оно представляет собой распределение разности двух зависимых биномиальных случайных величин $k$ и $l$, т.е. $x = k - l$. Если $k > l$, то с вероятностью $P(x)$ случайная величина $k$ превышает на $x$ единиц случайную величину $l$. Положительной разности соответствует наступление события *A* ровно *x* раз с вероятностью $P_A(x)$. При этом полагается, что $P_A(x) = P(x)$, $x = 1, 2, \ldots, N$.

Если $k<l$, то с вероятностью $P(x)$ случайная величина $k$ меньше на $|x|$ единиц случайной величины $l$. Отрицательной разнице соответствует наступление события $B$ ровно $|x|$ раз с вероятностью $P_B(x)$. При этом полагается, что $P_B(x)=P(x)$, $x=-1,-2,\ldots,-N$.

Если $k=l$, то с вероятностью $P(0)$ случайная величина $k$ равна случайной величине $l$. Нулевой разнице соответствует наступление события $C$ с вероятностью $P_C=P(0)$. Вероятность $P_C$ соответствует вероятности того, что при $N$ испытаниях события $A$ и $B$ ни разу не наступят.

## *Заключение*

Таким образом, сформированы модели дискретных законов распределения для последовательности независимых испытаний с тремя исходами, получены выражения для их основных числовых характеристик, а также для расчета вероятностей наступления соответствующих событий ровно $x$ раз. Показано, что распределение вероятностей (10) представляет собой распределение суммы двух зависимых биномиальных случайных величин, а распределение вероятностей (20) – распределение разности двух зависимых биномиальных случайных величин.

## *Список литературы*


1. Павлов, В. И. Системы мониторинга технического состояния экологически опасных объектов / В. И. Павлов, Т. В. Аксенова // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – 2011. – Т. 17, № 4. – С. 1094–1098.
2. Муромцев, Д. Ю. Методика проектирования базы знаний для активных экспертных систем / Д. Ю. Муромцев, В. В. Ермолаев, А. Ю. Коток // Вопросы современной науки и практики. Университет им. В. И. Вернадского. – 2014. – Спецвыпуск № 2 (52). – С. 92–95.
3. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1988. – 448 с.
4. Вероятность и математическая статистика : энциклопедия / гл. ред. Ю. В. Прохоров. – М. : Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
5. Федоткин, М. А. Модели в теории вероятностей / М. А. Федоткин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 608 с.
6. Карпов, И. Г. Законы распределения дискретных случайных величин и их идентификация / И. Г. Карпов // IV Междунар. науч.-техн. конф. «Радиолокация, навигация и связь». – Воронеж : ВГУ, 1998. – Т. 1. – С. 115–125.
7. Голоборщенко, В. С. Парадоксы в современной теории вероятностей. Ч. 1 : Ложность принятых постулатов и парадигм / В. С. Голоборщенко // Проблемы создания информационных технологий : сб. науч. тр. МАИТ. – М. : ООО «Техполиграфцентр», 2006. – Вып. 14. – С. 9–15.
8. Голоборщенко, В. С. Производящие и характеристические функции полиномиального и биномиального распределений как парадоксы в современной теории вероятностей / В. С. Голоборщенко // Проблемы создания информационных технологий : сб. науч. тр. МАИТ. – М. : ООО «Техполиграфцентр», 2008. – Вып. 17. – С. 5–11.
9. Джонсон, Н. Л. Одномерные дискретные распределения / Н. Л. Джонсон, С. Коц, А. Кемп. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 559 с.
10. Лысенко, А. В. Аппаратное обновление электронных устройств на основе 3PLD кристаллов / А. В. Лысенко, Д. И. Морозов, Н. К. Юрков // Труды Междунар. симп. Надежность и качество. – 2011. – Т. 2. – С. 186–187.
11. Юрков, Н. К. Оценка безопасности сложных технических систем / Н. К. Юрков // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 2. – С. 15–21.
12. Саушев, А. В. Синтез целевой функции при решении задачи параметрической оптимизации технических систем с линейными ограничениями / А. В. Саушев // Труды Междунар. симп. Надежность и качество. – 2015. – Т. 1. – С. 147–150.
13. Планирование испытаний на прочностную надежность конструкций методом статистического моделирования / М. А. Власов, С. Ф. Сергин, Т. В. Ермишова, Н. А. Орлова // Труды Междунар. симп. Надежность и качество. – 2015. – Т. 1. – С. 154–157.



***Муромцев Дмитрий Юрьевич***
доктор технических наук, профессор,
проректор по научно-инновационной деятельности,
Тамбовский государственный
технический университет
(392000, Россия, г. Тамбов, ул. Советская, 106)
E-mail: postmaster@nauka.tstu.ru

***Muromtsev Dmitriy Yur'evich***
doctor of technical sciences, professor,
vice-rector for research and innovation activities,
Tambov State Technical University
(392000, 106 Sovetskaya street, Tambov, Russia)

***Зырянов Юрий Трифонович***
доктор технических наук, профессор,
кафедра конструирования
радиоэлектронных и микропроцессорных систем,
Тамбовский государственный
технический университет
(392000, Россия, г. Тамбов, ул. Советская, 106)
E-mail: zut-tmb@mail.ru

***Zyryanov Yuriy Trifonovich***
doctor of technical sciences, professor,
sub-department of designing radio-electronic
and microprocessor systems,
Tambov State Technical University
(392000, 106 Sovetskaya street, Tambov, Russia)

***Рязанов Илья Георгиевич***
аспирант,
кафедра конструирования
радиоэлектронных и микропроцессорных систем,
Тамбовский государственный
технический университет
(392000, Россия, г. Тамбов, ул. Советская, 106)
E-mail: chief.ryazanoff2012@yandex.ru

***Ryazanov Il'ya Georgievich***
postgraduate student,
sub-department of designing radio-electronic
and microprocessor systems,
Tambov State Technical University
(392000, 106 Sovetskaya street, Tambov, Russia)

***Аннотация***. Сформированы модели дискретных законов распределения для анализа последовательности независимых испытаний с тремя исходами, получены выражения для их основных числовых характеристик, а также для расчета вероятностей наступления соответствующих событий.

***Abstract***. Generated model of discrete laws of distribution for the analysis of sequence of independent trials with three outcomes, the expressions for their basic chi-numbers characteristics, as well as to calculate probabilities of occurrence of the respective co-events.

***Ключевые слова***: модели дискретных законов распределения, одностороннее распределение триномиального типа, двустороннее распределение триномиального типа.

***Key words***: models of discrete laws of distribution, one-tailed tri-rated type, bilateral distribution of trinomial type.

**УДК 519. 2**
***Муромцев, Д. Ю.***
**Формирование моделей одномерных дискретных законов распределения для последовательности независимых испытаний надежности радиоэлектронных средств** / Д. Ю. Муромцев, Ю. Т. Зырянов, И. Г. Рязанов // Надежность и качество сложных систем. – 2015. – № 3 (11). – С. 80–86.