

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ ПРОБЛЕМ НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА

FUNDAMENTALS OF RELIABILITY AND QUALITY ISSUES

УДК 51-74

doi: 10.21685/2307-4205-2023-4-1

РЕШЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ УНИВЕРСАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ

А. И. Дивеев¹, Е. А. Софронова²

^{1,2} Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»

Российской академии наук, Москва, Россия

¹ aidiveev@mail.ru, ² sofronova_ea@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается уточненная постановка задачи оптимального управления, решение которой в отличие от классической постановки может быть непосредственно реализовано в реальном объекте. Для этой цели в задачу оптимального управления включена задача синтеза системы стабилизации движения объекта по оптимальной траектории, которая получена в результате решения классической задачи оптимального управления. *Материалы и методы.* Для решения задачи синтеза системы стабилизации используется метод символьной регрессии, метод сетевого оператора. Реальный объект управления включает эталонную модель объекта управления для генерации программной траектории. Приведен пример решения уточненной задачи оптимального управления пространственным движением квадрокоптера с фазовыми ограничениями. На первом этапе была решена задача оптимального управления в классической постановке и была найдена функция управления в форме кусочно-линейной аппроксимации как функция времени. Задача решалась на основе прямого подхода, в котором точность попадания в терминальное состояние и штрафы за нарушение фазовых ограничений были включены в один функционал совместно с заданным критерием качества. Для решения использовался эволюционный алгоритм, который нашел шестьдесят восемь параметров. Для подтверждения плохой реализуемости найденного решения было проведено моделирование полученного решения с малым возмущением начальных условий. В результате решение не достигло терминального состояния и фазовые ограничения были существенно нарушены. На втором этапе была решена уточненная задача оптимального управления, в которой для полученной программной траектории была решена задача синтеза стабилизации движения по этой траектории. При решении задачи синтеза начальное состояние было изменено на множество начальных состояний, и целевая функция представляла собой сумму значений заданного критерия для всех начальных состояний. Для проверки реализуемости полученного решения проведено моделирование системы управления с возмущенными начальными значениями. *Результаты и выводы.* Результаты моделирования показали, что все возмущенные траектории достигли терминального состояния практически без нарушений фазовых ограничений. В работе предполагается, что полученная система стабилизации работает для траекторий из определенного класса. Для подтверждения этого предположения была решена другая задача оптимального управления с теми же фазовыми ограничениями, но с другой траекторией их обхода. Для полученного оптимального управления была использована та же система стабилизации. Моделирование возмущенного решения подтвердило выдвинутое предположение.

Ключевые слова: оптимальное управление, синтез управления, система стабилизации, эволюционный алгоритм, символьная регрессия

Финансирование: работа выполнена при частичной поддержке РФФ, проект № 23-29-00339.

Для цитирования: Дивеев А. И., Софронова Е. А. Решение уточненной задачи оптимального управления с помощью универсальной системы стабилизации // Надежность и качество сложных систем. 2023. № 4. С. 5–17. doi: 10.21685/2307-4205-2023-4-1

SOLUTION OF THE REFINED OPTIMAL CONTROL PROBLEM USING A UNIVERSAL STABILISATION SYSTEM

A.I. Diveev¹, E.A. Sofronova²

^{1,2} Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
¹ aidiveev@mail.ru, ² sofronova_ea@mail.ru

Abstract. *Background.* The paper contains a refined statement of the optimal control problem, the solution of which, in contrast to the classical formulation, can be implemented directly in a real object. For this purpose, the optimal control problem includes the problem of synthesis of the stabilisation system of the object motion along the optimal trajectory, which is obtained as a result of solving the classical optimal control problem. *Materials and methods.* To solve the problem of stabilisation system synthesis the method of symbolic regression, method of network operator, was applied. The real control object contains a reference model of the control object for generating the program trajectory. An example of the solution of the refined optimal control problem of the spatial motion of a quadcopter with phase constraints is presented. In the first step, the optimal control problem was solved in the classical formulation and the control function was found in the form of a piecewise linear approximation as a time function. The problem was solved using a direct approach in which the accuracy of reaching the final state and the penalties for violating the phase constraints were included in a single function together with a given quality criterion. An evolutionary algorithm was used for the solution, which found sixty-eight parameters. To confirm the poor feasibility of the solution found, a simulation of the solution obtained with a small perturbation of the initial conditions was carried out. As a result, the solution did not reach the final state and the phase constraints were significantly violated. In the second stage, a refined optimal control problem was solved, in which the synthesis problem of motion stabilisation along this trajectory was solved for the obtained program trajectory. When solving the synthesis problem, the initial state was changed to a set of initial states, and the target function was the sum of values of a given criterion for all initial states. To verify the feasibility of the obtained solution, a simulation of the control system with perturbed initial values was carried out. *Results and conclusions.* The simulation results showed that all perturbed trajectories reached the final state practically without violating the phase constraints. In this paper, it is assumed that the obtained stabilisation system works for trajectories of a certain class. To confirm this assumption, another optimal control problem was solved with the same phase constraints but with a different trajectory of their circumvention. The same stabilisation system was used for the obtained optimal control. Modelling of the perturbed solution confirmed the assumption.

Keywords: optimal control, control synthesis, stabilisation system, evolutionary algorithm, symbolic regression

Financing: the work was partially supported by the RGNF, project No. 23-29-00339.

For citation: Diveev A.I., Sofronova E.A. Solution of the refined optimal control problem using a universal stabilisation system. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh sistem = Reliability and quality of complex systems.* 2023;(4):5–17. (In Russ.). doi: 10.21685/2307-4205-2023-4-1

Введение

Настоящая работа является развитием исследований, приведенных в работах [1, 2]. В работе [1] сформулирована уточненная постановка задачи оптимального управления. Классическая постановка Понтрягина [3] дополняется требованием, чтобы результирующая оптимальная траектория имела непустую окрестность со свойствами аттрактора. Для этого сначала ищется управление как функция времени и состояния, а для реализации системы стабилизации начальное состояние заменяется областью начальных состояний. Обеспечение дополнительных требований может быть получено различными способами, например, путем переформулирования задачи оптимального управления в задачу синтеза общего управления для заданной области начальных состояний, тогда каждое конкретное решение из данной области обеспечивает оптимальное значение заданного критерия качества. Другой подход заключается в решении задачи синтеза управления с целью обеспечения устойчивости относительно терминального состояния, но в этом случае не гарантируется получение оптимального значения заданного критерия качества.

Для стабилизации движения объекта управления по оптимальной траектории в теоретических работах [4] предлагается линеаризовать модель относительно траектории и получить линейную нестационарную модель объекта. Для обеспечения устойчивости такого объекта предлагается использовать линейную обратную связь. В целом устойчивость нестационарного объекта не является нерешенной проблемой. В большинстве практических работ на отслеживаемой траектории задаются точки, относительно которых объект управления становится устойчивым. Для этого используются

ПИ- и ПИД-регуляторы [5–8]. Движение по точкам устойчивой траектории замедляет движение объекта вблизи точки устойчивости, поэтому оптимальное значение критерия не сохраняется. В работе [9] построена система слежения за траекторией квадрокоптера, основанная на стабилизации скорости квадрокоптера в горизонтальной плоскости вдоль прямой линии. Для этого строится П-регулятор на основе функции Ляпунова. Движение по траектории прямолинейных участков с постоянной скоростью не является оптимальным. Необходимо отслеживать траекторию не только в пространстве, но и во времени. В работе [10] рассматривается подход к решению задачи оптимального управления методом синтезированного управления. Синтезированное управление является универсальным подходом к решению задачи оптимального управления в классе реализуемых систем, однако в каждом конкретном случае оно может иметь несколько решений.

Впервые задача синтеза стабилизации движения по оптимальной траектории была рассмотрена в работе [11]. Была получена система управления, включающая эталонную модель для генерации оптимальной траектории во времени. Исследования показали, что система стабилизации зависит от вида оптимальной траектории. Для устранения данного недостатка в работе [2] было предложено использовать универсальную систему стабилизации. Универсальность системы стабилизации заключается в том, что для конкретного объекта получается одна система стабилизации движения для различных типов траекторий. Для этого сначала решается задача синтеза одной системы стабилизации для нескольких заданных траекторий. Класс траекторий рассматривается как обучающее множество, а синтез системы стабилизации – это обучение системы управления для заданного обучающего множества. Далее эта система стабилизации применяется к движению по траектории, не вошедшей в обучающий набор. Для решения задачи синтеза системы стабилизации применяются методы символьной регрессии [12, 13].

Постановка задачи

Математическая модель объекта управления задается в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

где \mathbf{x} – вектор состояния объекта управления, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]^T$, \mathbf{u} – вектор управления, $\mathbf{u} \in \mathbf{U} \subseteq \mathbf{R}^m$, множество \mathbf{U} – компактное множество, которое часто определяется ограничениями на управление

$$\mathbf{u}^- \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}^+, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}^- = [u_1^- \dots u_m^-]^T, \quad \mathbf{u} = [u_1 \dots u_m]^T, \quad \mathbf{u}^+ = [u_1^+ \dots u_m^+]^T.$$

Для системы (1) задано начальное состояние

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (3)$$

Терминальное состояние задается как

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f, \quad (4)$$

где t_f – время достижения терминального состояния, как правило не задано, но ограничено, $t_f \leq t^+$, t^+ – максимально возможное по мнению исследователя предельное время длительности процесса управления.

Критерий качества задается в общем интегральном виде

$$J_0 = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}}. \quad (5)$$

При решении задачи прямым численным методом терминальное состояние (4) достигается с определенной точностью, которая входит в критерий качества (5). Таким образом, критерий качества численного решения задачи имеет следующий вид

$$J_1 = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt + p_1 \|\mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_f)\| \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}, \quad (6)$$

где p_1 – весовой коэффициент, определяющий сравнительную важность точности достижения терминального состояния по сравнению со значением подынтегрального критерия качества

$$t_f = \begin{cases} t, & \text{если } t < t^+ \text{ и } \|\mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t)\| \leq \varepsilon_1, \\ t^+ & \text{иначе,} \end{cases} \quad (7)$$

где ε_1 – заданная точность достижения терминального состояния (4).

В классической задаче оптимального управления ищем функцию управления как функцию времени

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(t) \in U. \quad (8)$$

Для обеспечения стабилизации движения объекта вдоль найденной программной траектории решаем задачу синтеза системы стабилизации движения объекта по программной траектории. В задаче синтеза вместо одного начального состояния (3) задаем область начальных состояний. Для численного решения область начальных состояний задаем в виде конечного множества точек

$$X_0 = \{\mathbf{x}^{0,1}, \dots, \mathbf{x}^{0,K}\}. \quad (9)$$

Задаем одно терминальное состояние (4).

Оптимальная траектория является функцией времени

$$\mathbf{x}^*(t), \quad t \in (0; t_f). \quad (10)$$

Необходимо найти оптимальное управление как функцию отклонения вектора пространства состояний от оптимальной траектории в каждый момент времени

$$\mathbf{u} = \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}). \quad (11)$$

Если функцию управления (11) вставить в правую часть системы дифференциальных уравнений модели (1), то получим следующую систему:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})). \quad (12)$$

Функция управления (11) должна минимизировать сумму максимальных отклонений всех частных решений системы (12) из начальных состояний заданной области (9) и учитывать точность попадания в терминальное состояние

$$J_2 = \sum_{i=1}^K \left(\max_{t \in (0; t_{f,i})} \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i})\| + p_1 \|\mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_{f,i})\| \right) \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}, \quad (13)$$

где $t_{f,i}$ – время достижения заданного терминального состояния частного решения из начального состояния $\mathbf{x}^{0,i}$, определяемого уравнением (7), $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i})$ – частное решение системы (12) из начального состояния $\mathbf{x}^{0,i}$.

Для генерации программной траектории добавим к модели замкнутой системы управления (12) эталонную модель, то получим модель объекта управления размерности $2n$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})), \quad (14)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}),$$

где функция системы стабилизации $\mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})$ удовлетворяет ограничениям на управление при любых значениях своих аргументов

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \in U. \quad (15)$$

Теперь, если решаем новую задачу оптимального управления для модели объекта (14), несмотря на то, что ищем функцию управления как функцию времени (8), получаем функцию управления, реализуемую непосредственно в объекте управления. Это определено тем, что функцию управления ищем как программу управления для эталонной модели, которая генерирует программную траекторию, а объект управления движется по полученной программной траектории под действием функции управления обратной связи (11).

Проблема реализуемости функции управления, точнее модели объекта управления с включенной в нее функцией управления, связана с тем, что любая модель описывает объект управления не точно. В большинстве случаев со временем ошибка между состоянием объекта, вычисленным по модели, и его реальным состоянием возрастает. В результате она достигает критической величины, при которой управление объектом становится невозможным. Поэтому на практике реализуемая функция управления суть функция обратной связи, которая учитывает отклонения реального состояния объекта управления от вычисленного по модели. Для получения функции управления обратной связи необходимо решить задачу синтеза управления, т.е. найти векторную функцию управления, аргументом которой является вектор состояния объекта управления. Но проблема состоит в том, что задача синтеза управления существенно сложнее задачи оптимального управления. Если современные вычислительные средства позволяют решить задачу оптимального управления на бортовом процессоре, практически в реальном времени и найти функцию управления как функцию времени, например с помощью кусочно-линейной аппроксимации, то решить задачу синтеза управления возможно только на этапе проектирования системы управления в лабораторных условиях.

В данном случае на этапе проектирования решена одна задача оптимального управления и получена функция управления как функция времени, и программная траектория тоже как функция времени. Далее на этапе проектирования решена задача синтеза управления и получена функция управления обратной связи, которая обеспечивает движение объекта управления вдоль найденной на предварительном этапе программной траектории. Очевидно, что функция управления обратной связи реализуема на практике. На основе синтезированной функции управления обратной связи строим расширенную* модель объекта управления, которая включает в правые части функцию управления, обеспечивающую стабилизацию движения объекта управления вдоль программной траектории, генерируемой эталонной моделью, включенной в расширенную модель объекта управления (14). Теперь решаем на бортовом процессоре различные задачи оптимального управления, получаем программные траектории и реализуем движение объекта управления по полученным программным траекториям за счет синтезированной на этапе проектирования системы стабилизации.

Приведем формулировку задачи оптимального управления для расширенной модели (14) объекта управления.

Задано начальное состояние (3). Задано терминальное состояние (4). Задан критерий качества

$$J_3 = \int_0^{t_f} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})) dt + p_1 \|\mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_f)\| \rightarrow \min_{\mathbf{u} \in U}. \quad (16)$$

Необходимо найти функцию управления в виде функции времени (8).

В задаче ищем функцию управления как функцию времени, а получаем замкнутую систему управления с обратной связью, так как функцию управления ищем для эталонной модели для получения программной траектории, а универсальная система стабилизации обеспечивает движение объекта вдоль программной траектории при возможных реальных возмущениях.

Вычислительный эксперимент

Рассмотрим задачу оптимального управления пространственным движением квадрокоптера. Математическая модель объекта управления имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_4, \\ \dot{x}_2 &= x_5, \\ \dot{x}_3 &= x_6, \\ \dot{x}_4 &= u_4(\sin(u_3)\cos(u_2)\cos(u_1) + \sin(u_1)\sin(u_2)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_5 &= u_4 \cos(u_3) \cos(u_1) - g, \\ \dot{x}_6 &= u_4 (\cos(u_2) \sin(u_1) - \cos(u_1) \sin(u_2) \sin(u_3)),\end{aligned}$$

где $g = 9,80665$.

Пространственное перемещение квадрокоптера выполняется за счет изменения углов наклона квадрокоптера u_1, u_2, u_3 , которые обеспечивают необходимую проекцию силы тяги u_4 винтов квадрокоптера на горизонтальную плоскость $\{x_1; x_3\}$. Для значений компонент вектора управления заданы ограничения

$$\begin{aligned}-\pi/12 &= u_1^- \leq u_1 \leq u_1^+ = \pi/12, \\ -\pi &= u_2^- \leq u_2 \leq u_2^+ = \pi, \\ -\pi/12 &= u_3^- \leq u_3 \leq u_3^+ = \pi/12, \\ 0 &= u_4^- \leq u_4 \leq u_4^+ = 12.\end{aligned}\tag{18}$$

Для модели (17) заданы начальное и терминальное состояния

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 = [0 \ 5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T,\tag{19}$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}^f = [10 \ 5 \ 10 \ 0 \ 0 \ 0]^T.\tag{20}$$

Необходимо найти функцию управления как функцию времени (8), которая удовлетворяет ограничениям (18) и при ее подстановке в правые части системы (17) получаем такую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, частное решение которой из начального состояния (19) достигает терминального состояния (20) с оптимальным значением заданного критерия качества

$$J_4 = t_f + p_1 \|\mathbf{x}^f - \mathbf{x}(t_f, \mathbf{x}^0)\| + p_2 \int_0^{t_f} \sum_{i=1}^M \vartheta(\varphi_i(\mathbf{x})) dt + p_3 \sum_{j=1}^N \min_{t \in \{0; t_f\}} \eta_j(\mathbf{x}(t)),\tag{21}$$

где $p_1 = 1, p_2 = 5, p_3 = 3, t_f$ определяем из соотношения (7) при $t^+ = 6,4, \varepsilon_1 = 0,1$,

$$\vartheta(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha > 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = r_i - \sqrt{(a_{x,i} - x_1)^2 + (a_{z,i} - x_3)^2}, \quad i = 1, \dots, M = 3,$$

$$r_1 = 1, r_2 = 1, r_3 = 1, a_{x,1} = 2, a_{z,1} = 2, a_{x,2} = 5, a_{z,2} = 5, a_{x,3} = 8, a_{z,3} = 8,$$

$$\eta_j(\mathbf{x}(t)) = L_j(\mathbf{x}(t)) \vartheta(\delta_j - L_j(\mathbf{x}(t))),$$

$$L_j(\mathbf{x}(t)) = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (g_{j,k} - x_k(t))^2}, \quad j = 1, \dots, N = 3,$$

$$g_{1,1} = 1, g_{1,2} = 5, g_{1,3} = 3, g_{2,1} = 6, g_{2,2} = 5, g_{2,3} = 4, g_{3,1} = 7, g_{3,2} = 5, g_{3,3} = 9, \delta_1 = 0,4, \delta_2 = 0,4, \delta_3 = 0,4.$$

В формуле (21) функции $\varphi_i(\mathbf{x}), i = 1, \dots, M = 3$, определяют условия выполнения фазовых ограничений. В данном случае это круговые области на плоскости $\{x_1; x_3\}$, куда объект не должен попадать. Функции $\eta_j(\mathbf{x}(t)), j = 1, \dots, N = 3$ – это области в трехмерном пространстве $\{x_1; x_2; x_3\}$ (шары), через которые объект обязательно должен пролететь. Соответственно, p_2, p_3 – коэффициенты штрафов за нарушение фазовых ограничений и пропуск обязательной для пролета области.

Для данной задачи находим функцию управления как функцию времени (8) прямым методом на основе кусочно-линейной аппроксимации. Для этой цели введем в рассмотрение интервал времени Δt и разобьем весь интервал управления $(0; t^+)$ на L интервалов

$$L = \left\lfloor \frac{t^+}{\Delta t} \right\rfloor. \quad (22)$$

Для каждого интервала компоненту вектора управления определяем в виде линейного отрезка, соединяющего два вещественных значения, заданных на границах интервала. Всего имеем $L+1$ границ интервалов. Для m компонент вектора управления необходимо найти $m(L+1)$ значений компонент вектора постоянных параметров

$$\mathbf{q} = [q_1 \ \dots \ q_{m(L+1)}]^T. \quad (23)$$

С учетом ограничений на управление (18) кусочно-линейная функция управления (8) для решения задачи оптимального управления (17) – (21) имеет следующий вид:

$$v_i(t) = \begin{cases} u_i^+, & \text{если } u_i^+ \leq \tilde{u}_i(t), \\ u_i^-, & \text{если } \tilde{u}_i(t) \leq u_i^-, \quad i=1, \dots, m, \\ \tilde{u}_i(t) - & \text{иначе,} \end{cases} \quad (24)$$

где

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{q_{i+jm} - q_{i+(j-1)m}}{\Delta t} (t - (j-1)\Delta t) + q_{i+(j-1)m}, \quad (25)$$

$$(j-1)\Delta t \leq t < j\Delta t, \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, L.$$

Для рассматриваемой задачи устанавливаем $\Delta t = 0,4$, поэтому $L = 16$. Всего необходимо найти $m(L+1) = 4 \cdot (16+1) = 68$ параметров. Для решения задачи используем эволюционный гибридный алгоритм, который для одной и той же популяции возможных решений включает три типа эволюционных преобразований согласно генетическому алгоритму, алгоритму «роя-частиц» и алгоритму «оптимизатора серого волка».

В результате гибридный эволюционный алгоритм нашел следующее решение: $\mathbf{q}^{opt} = [-16.08389 \ -15.28755 \ -16.31609 \ 14.95188 \ -10.62907 \ -4.78333 \ 0.57000 \ 15.09140 \ -14.91674 \ 4.96100 \ 7.74769 \ 19.94703 \ -12.00959 \ 3.46782 \ -15.17209 \ -3.31380 \ 17.61858 \ -7.88980 \ -17.34375 \ 19.90094 \ 0.62639 \ 16.03902 \ -15.35935 \ 18.94003 \ 1.44680 \ 17.41909 \ 1.69807 \ 8.99746 \ -15.90066 \ 8.78135 \ -2.37638 \ 19.74956 \ 4.15111 \ -0.07598 \ 19.98296 \ 10.58280 \ -19.26423 \ -10.64365 \ -0.02360 \ 7.04801 \ -14.00564 \ -11.90236 \ 19.02182 \ 14.05206 \ 5.89434 \ -10.03158 \ -8.14191 \ 19.54826 \ 16.95683 \ -18.92949 \ -1.24965 \ 3.90631 \ 13.95724 \ -3.53541 \ -0.54602 \ 19.00056 \ -13.42070 \ 0.21022 \ -1.96763 \ 6.18557 \ -6.66326 \ 0.42091 \ -9.61879 \ 16.70781 \ -4.64609 \ 3.20324 \ 12.53990 \ 6.12437]^T$.

Проекция оптимальной траектории на горизонтальную плоскость представлена на рис. 1.

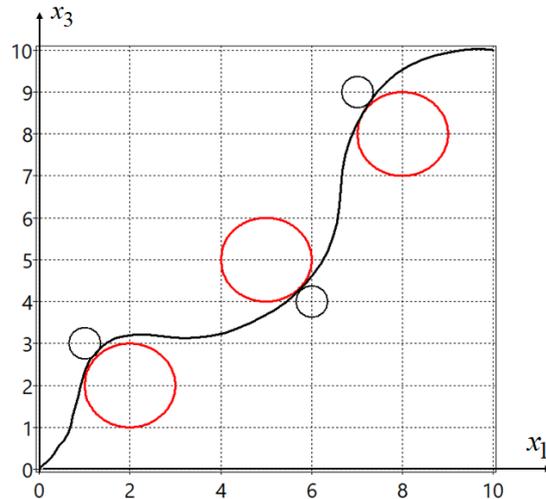


Рис. 1. Проекция оптимальной траектории на горизонтальную плоскость

На рис. 1 красными сферами указаны фазовые ограничения, малые черные сферы указывают области обязательного пролета квадрокоптером. Как видно из рисунка, квадрокоптер достиг терминального состояния, выполнил условия фазовых ограничений и пролетел через все обязательные области.

Данное управление не реализуемо на практике, так как является разомкнутым и не зависит от состояния объекта. Для примера на рис. 2 приведена проекция на горизонтальную плоскость траектории движения квадрокоптера с той же функцией управления, но с возмущенным начальным состоянием. Возмущения были выбраны случайно и не превышали величину 0,1.

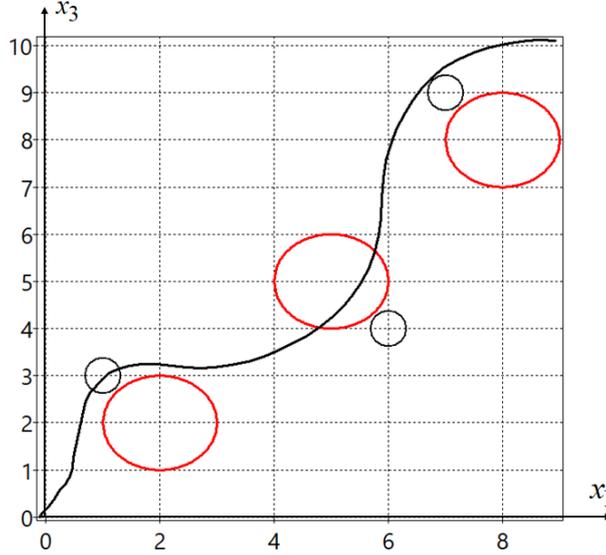


Рис. 2. Проекция траектории на горизонтальную плоскость при возмущении начального состояния

Как видим из рис. 2, квадрокоптер нарушил некоторые фазовые ограничения, не пролетел через все обязательные области и достиг терминального состояния с существенной ошибкой.

Для реализуемости полученного управления необходимо построить систему стабилизации движения объекта относительно заданной оптимальной траектории и получить функцию управления как функцию отклонения объекта от заданной траектории (11). Для этой цели используем метод сетевого оператора [12]. В задаче синтеза вместо одного начального состояния задаем несколько начальных состояний с небольшими отклонениями от исходного начального состояния (19)

$$\mathbf{x}^{0,i} = ((i)_3 - \mathbf{1}_3) \odot \Delta, \quad i = 0, \dots, K = 26, \quad (26)$$

где $(i)_3$ – трехкомпонентный троичный код числа i , $(i)_3 = [z_1 \ z_2 \ z_3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $z_j \in \{0,1,2\}$, $j = 1,2,3$, $\mathbf{1}_3 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, \odot – адамарово покомпонентное произведение векторов, $\Delta = [\Delta_1 \ \Delta_2 \ \Delta_3 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. В задаче синтеза необходимо минимизировать следующий критерий качества

$$J_5 = \sum_{i=1}^K \left(\max_{t \in \{0, t_{f,i}\}} \|\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i})\| + \tilde{p}_1 \|x^f - x(t_{f,i}, \mathbf{x}^{0,i})\| + \tilde{p}_2 \int_0^{t_{f,i}} \sum_{r=1}^M \vartheta(\varphi_r(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i}))) dt + \tilde{p}_3 \sum_{j=1}^N \min_{t \in \{0, t_{f,i}\}} \eta_j(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}^{0,i})) \right) \rightarrow \min. \quad (27)$$

Синтез выполнялся при следующих значениях параметров: $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0.2$, $\tilde{p}_1 = 1$, $\tilde{p}_2 = 3$, $\tilde{p}_3 = 0,8$. Метод сетевого оператора нашел следующее решение:

$$h_i(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = \begin{cases} u_i^+, & \text{если } u_i^+ \leq \tilde{h}_i(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}), \\ u_i^-, & \text{если } \tilde{h}_i(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) \leq u_i^-, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \tilde{h}_i(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) - \text{иначе,} \end{cases} \quad (28)$$

где

$$\tilde{h}_1(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = A - C, \quad (29)$$

$$\tilde{h}_2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = A - C - (A - C)^3 - q_3(x_3^* - x_3), \quad (30)$$

$$\tilde{h}_3(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = \rho_{19}(B) + \rho_{17}(q_1(x_1^* - x_1) + q_4(x_4^* - x_4)), \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{h}_4(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) = & \tilde{h}_3^2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}) + \ln(\tilde{h}_2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})) + \operatorname{sgn}(A)\sqrt{|A|} + \\ & + \rho_{19}(C) + \arctan(D) + \operatorname{sgn}(F) + \arctan(G) + \exp(q_2(x_2^* - x_2)) + \sqrt{|q_1|}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$A = B + \tanh(x_1^* - x_1),$$

$$B = C + \mu(q_6(x_6^* - x_6) + q_6(x_6^* - x_6) + \operatorname{sgn}(q_3(x_3^* - x_3))),$$

$$C = \exp(D) + (q_6(x_6^* - x_6))^3 + \operatorname{sgn}(E)\sqrt{|E|} + \tanh(E) + \exp(G),$$

$$D = E + \tanh(F) + (q_6(x_6^* - x_6) + q_6(x_6^* - x_6))^3 + \rho_{18}(H) + \sin^2(q_5),$$

$$E = F + \sqrt[3]{x_3^* - x_3} + \sin(q_1(x_1^* - x_1) + q_4(x_4^* - x_4)),$$

$$F = G + \operatorname{sgn}(x_5^* - x_5) + (x_2^* - x_2)^3 + q_6(x_6^* - x_6) + q_6(x_6^* - x_6) + \operatorname{sgn}(q_3(x_3^* - x_3)) + \arctan(G) - H + \rho_{17}(q_4),$$

$$G = \rho_{17}(q_6(x_6^* - x_6) + q_6(x_6^* - x_6)) + H^3 + q_1(x_1^* - x_1) + q_4(x_4^* - x_4) + \vartheta(q_5(x_5^* - x_5)) + (x_5^* - x_5)^2,$$

$$H = \sin(q_6(x_6^* - x_6)) + q_5(x_5^* - x_5) + q_2(x_2^* - x_2) + \cos(q_1) + \cos(x_4^* - x_4) + \vartheta(x_2^* - x_2),$$

$$\rho_{17}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\alpha)\ln(|\alpha| + 1),$$

$$\rho_{18}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\alpha)(\exp(|\alpha|) - 1),$$

$$\rho_{19}(\alpha) = \operatorname{sgn}(\alpha)\exp(-|\alpha|),$$

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } |\alpha| < 1, \\ \operatorname{sgn}(\alpha) & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$q_1 = 11.9292, \quad q_2 = 1.93799, \quad q_3 = 1.0686, \quad q_4 = 8.14478, \quad q_5 = 14.70093, \quad q_6 = 14.17212.$$

С учетом полученной системы стабилизации математическая модель объекта управления имеет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_4,$$

$$\dot{x}_2 = x_5,$$

$$\dot{x}_3 = x_6,$$

$$\dot{x}_4 = h_4(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})(\sin(h_3(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))\cos(h_2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))\cos(h_1(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})) + \sin(h_1(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))\sin(h_2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))),$$

$$\dot{x}_5 = h_4(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})\cos(h_3(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))\cos(h_1(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})) - g, \quad (33)$$

$$\dot{x}_6 = h_4(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})(\cos(h_2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))\sin(h_1(\mathbf{x}^* - \mathbf{x})) - \cos(h_1(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))\sin(h_2(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))\sin(h_3(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}))),$$

$$\dot{x}_1^* = x_4^*,$$

$$\dot{x}_2^* = x_5^*,$$

$$\dot{x}_3^* = x_6^*,$$

$$\dot{x}_4^* = u_4 (\sin(u_3) \cos(u_2) \cos(u_1) + \sin(u_1) \sin(u_2)),$$

$$\dot{x}_5^* = u_4 \cos(u_3) \cos(u_1) - g,$$

$$\dot{x}_6^* = u_4 (\cos(u_2) \sin(u_1) - \cos(u_1) \sin(u_2) \sin(u_3)).$$

В модели двенадцать уравнений, первые шесть уравнений описывают математическую модель объекта управления с системой стабилизации движения вдоль заданной траектории. Управлением в модели является программная траектория. Остальные шесть уравнений описывают эталонную модель, которая интегрируется в бортовом процессоре объекта управления. В результате решения этих шести уравнений получаем программную траектория, которая подается в систему стабилизации объекта управления.

Для данной модели решим ту же задачу оптимального управления (18)–(21) и найдем функцию управления как функцию времени, но в данном случае эта функция управления будет реализуемой, так как она предназначена для генерации программной траектории, а объект уже располагает функцией обратной связи.

Для решения используем также разбиение оси времени на равные интервалы, и для каждой компоненты управления – нахождение значений параметров на границах интервалов.

Для решения задачи используем тот же гибридный эволюционный алгоритм, который нашел следующее решение: $\mathbf{q}^* = [-5.13794 \ -15.49724 \ -12.82804 \ 12.59093 \ -6.68684 \ -4.67768 \ 0.68512 \ 15.72163 \ -17.54256 \ 4.81652 \ 8.60023, \ 19.65063 \ -12.71387 \ 3.21392 \ -15.15816 \ -3.27893 \ 17.29348 \ -8.31660 \ -10.32430 \ 19.95503 \ 1.12409, \ 16.53391 \ -13.66277 \ 18.39568 \ 2.08472 \ 17.64254 \ 1.84001 \ 8.94204 \ -17.68099 \ 8.30836 \ -2.29860 \ 18.45229 \ 3.35038 \ -0.00510 \ 19.45802 \ 10.43963 \ -19.64614 \ -10.91143 \ 0.08173 \ 6.84413 \ -14.49671 \ -11.97947 \ 17.76482 \ 14.42123 \ 4.97627 \ -9.00329 \ -11.25190 \ 19.07408 \ 4.46671 \ -19.23971 \ -0.98305 \ 4.94638 \ 12.82386 \ -3.02202 \ -0.66751 \ 19.55158 \ -12.79522 \ -0.08963 \ -1.66648, \ 5.24520 \ -9.95307 \ 0.51696 \ -6.12214 \ 17.82393 \ 0.00000 \ 0.95714 \ -1.12028, \ 6.90519]^T$.

На рис. 3 приведены графики проекций траекторий движения объекта (33) из восьми различных начальных условий, которые были выбраны как максимально допустимые возмущения начального состояния (26) на величину 0,2 от исходного начального состояния (19).

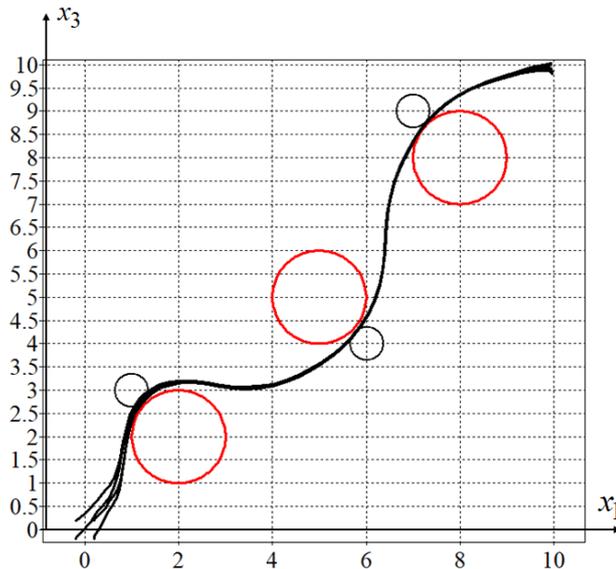


Рис. 3. Проекция траекторий на горизонтальную плоскость из восьми начальных состояний

Как видно из графиков, система стабилизации (28) движения объекта вдоль заданной программной траектории обеспечила существование окрестности оптимальной траектории со свойствами притяжения, что обеспечивает практическую реализуемость полученного решения в реальном объекте управления.

Система стабилизации синтезирована для обеспечения движения объекта относительно некоторой найденной ранее оптимальной траектории, хотя траектория была найдена после решения

задачи синтеза и построения модели (33). Очевидно, что такая система стабилизации (28) может использоваться для стабилизации движения объекта относительно других траекторий некоторого класса.

Изменим задачу оптимального управления за счет изменения положения областей обязательного пролета квадрокоптера. Пусть в задаче оптимального управления (33), (18) – (21) изменены координаты центров областей обязательного пролета квадрокоптера: $g_{1,1} = 3$, $g_{1,2} = 5$, $g_{1,3} = 1$, $g_{2,1} = 4$, $g_{2,2} = 5$, $g_{2,3} = 6$, $g_{3,1} = 9$, $g_{3,2} = 5$, $g_{3,3} = 7$. Данные изменения должны заставить квадрокоптер пролететь по новой траектории. Проверим, сможет ли синтезированная система стабилизации обеспечить движение квадрокоптера по новой траектории.

Решим новую задачу оптимального управления. В результате было найдено следующее решение: $\mathbf{q}^* = [17.88421 \ -18.99638 \ -3.10578 \ 17.44883 \ -17.74250 \ 17.172016 \ -16.16878, \ 19.72185 \ -10.41619 \ -16.41715 \ -19.11392 \ 18.47060 \ 19.00219 \ -0.36495 \ 16.03874 \ -2.63710 \ -17.67803 \ -14.90955 \ 8.61284 \ 17.39112 \ -15.367370 \ 15.18712 \ 15.42160 \ 19.56070 \ 0.02435 \ 2.15191 \ -17.26005 \ 18.56314 \ 3.23809 \ -4.05828 \ -5.15527 \ 12.58340 \ 2.55186 \ -15.71949 \ -5.26035 \ 19.10096 \ 14.93652 \ -16.36946 \ -7.13979 \ 16.42151 \ 0.94527 \ 1.80694 \ -17.37248 \ 0.11103 \ -13.45214 \ 15.20876 \ 7.83547 \ 11.28632 \ -13.54579 \ 6.29187 \ 7.11718 \ 17.68948 \ 1.60379 \ 6.96692 \ 0.03372 \ 19.21870 \ 83.28655, \ 3.74266, \ 12.16980, \ 17.97492 \ 3.43564 \ 10.26265 \ -4.85516 \ 18.64589 \ 0.64871 \ -0.04993 \ -2.60517 \ -0.93611]^T$.

На рис. 4 приведены проекции траекторий движения квадрокоптера из восьми предельно отклоненных от исходного начального состояния для новой программной траектории.

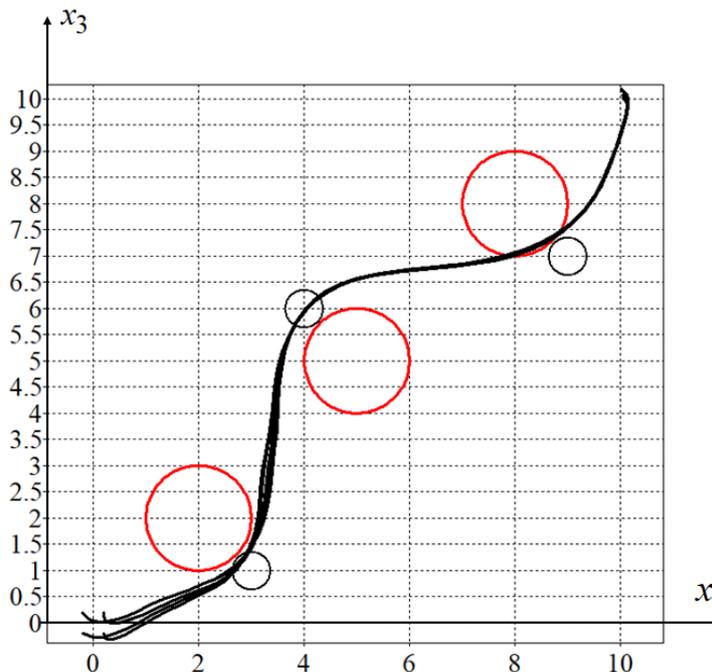


Рис. 4. Проекция траекторий на горизонтальную плоскость из восьми начальных состояний для нового программного управления

Как видно из рисунка, синтезированная система стабилизации (28), несмотря на то, что была получена для движения объекта в окрестности одной программной траектории, обеспечивает движение объекта в окрестности новой, другой программной траектории.

Заключение

В работе экспериментально показано, что возможно синтезировать универсальную систему стабилизации, которая может обеспечить движение объекта относительно заданных траекторий определенного класса. Решение задачи оптимального управления для модели объекта управления с системой стабилизации движения в окрестности заданной траектории позволяет найти прямым методом функцию управления в классе практически реализуемых функций.

Список литературы

1. Дивеев А. И. Уточнение задачи оптимального управления для практической реализации ее решения // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2023. Т. 509. С. 36–45.
2. Diveev A. I., Sofronova E. A. Universal Stabilisation System for Control Object Motion along the Optimal Trajectory // *Mathematics*. 2023. Vol. 11. P. 3556.
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М. : Наука, 1983. 393 с.
4. Brockett R. W. Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. *Differential Geometric Control Theory* / ed. by R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussmann. Boston : Birkhauser, 1983. P. 181–191.
5. Walsh G., Tilbury D., Sastry S. [et al.]. Stabilization of Trajectories for Systems with Nonholonomic Constraints // *IEEE Trans. Autom. Control*. 1994. Vol. 39. P. 216–222.
6. Samir A., Hammad A., Hafez A., Mansour H. Quadcopter Trajectory Tracking Control using State-Feedback Control with Integral Action // *Int. J. Comput. Appl.* 2017. Vol. 168. P. 1–7.
7. Nguyen A. T., Xuan-Mung N., Hong S-K. Quadcopter Adaptive Trajectory Tracking Control: A New Approach via Backstepping Technique // *Appl. Sci.* 2019. Vol. 3873. P. 1–17.
8. Mohamed M. J., Abbas M. Y. Design a Fuzzy PID Controller for Trajectory Tracking of Mobile Robot // *Eng. Technol. J.* 2018. Vol. 36A. P. 100–110.
9. Ma T., Wong S. Trajectory Tracking Control for Quadrotor. UAV // *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO) (5–8 dec. 2017) : proceedings*. Macau, Macao, 2017.
10. Diveev A., Sofronova E. Synthesized Control for Optimal Control Problem of Motion Along the Program Trajectory // *8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT) (Istanbul, Turkey, 17–20 May 2022) : proceedings*. Istanbul, 2022. P. 475–480.
11. Diveev A., Sofronova E., Konyrbaev N., Bexeitova A. Stabilization of Movement Along an Optimal Trajectory and Its Solution // *Eng. Proc.* 2023. Vol. 33. P. 12.
12. Diveev A. I. Sofronova E. A. The network operator method for search of the most suitable mathematical equation. *Bio-Inspired Computational Algorithms and Their Applications*. Rijeka, Croatia : InTech, 2012. P. 19–42.
13. Diveev A., Kazaryan D., Sofronova E. Symbolic regression methods for control system synthesis // *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2014 (Palermo, Italy, 16–19 June 2014) : proceedings*. Palermo, 2014. P. 587–592.
14. Diveev A. Hybrid Evolutionary Algorithm for Optimal Control Problem Intelligent Systems and Applications // *IntelliSys 2022. Lecture Notes in Networks and Systems*. Cham, Switzerland : Springer, 2023. Vol. 543. P. 726–738.
15. Diveev A. I., Shmalko E. Yu. Synthesis of a mobile robot control system using the method of intellectual evolution // *Reliability and quality of complex systems*. 2013. № 3. P. 52–59.
16. Diveev A. I., Kotova A. A. Evolutionary method for solving the optimal control problem to improve the quality of group interaction of robots // *Reliability and quality of complex systems*. 2019. № 4. P. 60–68.

References

1. Diveev A.I. Clarification of the optimal control problem for the practical implementation of its solution. *Doklady Rossiyskoy akademii nauk. Matematika, informatika, protsessy upravleniya = Reports of the Russian Academy of Sciences. Mathematics, computer science, management processes*. 2023;509:36–45. (In Russ.)
2. Diveev A.I., Sofronova E.A. Universal Stabilisation System for Control Object Motion along the Optimal Trajectory. *Mathematics*. 2023;11:3556.
3. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov = Mathematical theory optimal processes*. Moscow: Nauka, 1983:393. (In Russ.)
4. Brockett R.W. *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization. Differential Geometric Control Theory*. Boston: Birkhauser, 1983:181–191.
5. Walsh G., Tilbury D., Sastry S. et al. Stabilization of Trajectories for Systems with Nonholonomic Constraints. *IEEE Trans. Autom. Control*. 1994;39:216–222.
6. Samir A., Hammad A., Hafez A., Mansour H. Quadcopter Trajectory Tracking Control using State-Feedback Control with Integral Action. *Int. J. Comput. Appl.* 2017;168:1–7.
7. Nguyen A.T., Xuan-Mung N., Hong S-K. Quadcopter Adaptive Trajectory Tracking Control: A New Approach via Backstepping Technique. *Appl. Sci.* 2019;3873:1–17.
8. Mohamed M.J., Abbas M.Y. Design a Fuzzy PID Controller for Trajectory Tracking of Mobile Robot. *Eng. Technol. J.* 2018;36A:100–110.
9. Ma T., Wong S. Trajectory Tracking Control for Quadrotor. UAV. *IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics (ROBIO) (5–8 dec. 2017): proceedings*. Macau, Macao, 2017.
10. Diveev A., Sofronova E. Synthesized Control for Optimal Control Problem of Motion Along the Program Trajectory. *8th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT) (Istanbul, Turkey, 17–20 May 2022): proceedings*. Istanbul, 2022:475–480.

11. Diveev A., Sofronova E., Konyrbaev N., Bexeitova A. Stabilization of Movement Along an Optimal Trajectory and Its Solution. *Eng. Proc.* 2023;33:12.
12. Diveev A.I. Sofronova E.A. *The network operator method for search of the most suitable mathematical equation. Bio-Inspired Computational Algorithms and Their Applications.* Rijeka, Croatia: InTech, 2012:19–42.
13. Diveev A., Kazaryan D., Sofronova E. Symbolic regression methods for control system synthesis. *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation, MED 2014 (Palermo, Italy, 16–19 June 2014): proceedings.* Palermo, 2014:587–592.
14. Diveev A. Hybrid Evolutionary Algorithm for Optimal Control Problem Intelligent Systems and Applications. *IntelliSys 2022. Lecture Notes in Networks and Systems.* Cham, Switzerland: Springer, 2023;543:726–738.
15. Diveev A.I., Shmalko E.Yu. Synthesis of a mobile robot control system using the method of intellectual evolution. *Reliability and quality of complex systems.* 2013;(3):52–59.
16. Diveev A.I., Kotova A.A. Evolutionary method for solving the optimal control problem to improve the quality of group interaction of robots. *Reliability and quality of complex systems.* 2019;(4):60–68.

Информация об авторах / Information about the authors

Асхат Ибрагимович Дивеев

доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник,
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 44)
E-mail: aidiveev@mail.ru

Елена Анатольевна Софронова

кандидат технических наук, доцент,
старший научный сотрудник,
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 44)
E-mail: sofronova_ea@mail.ru

Askhat I. Diveev

Doctor of technical sciences, professor, head researcher,
Federal Research Center "Computer Science
and Control" of the Russian Academy of Sciences
(44 Vavilova street, Moscow, Russia)

Elena A. Sofronova

Candidate of technical sciences,
associate professor, senior researcher,
Federal Research Center "Computer Science
and Control" of the Russian Academy of Sciences
(44 Vavilova street, Moscow, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.**

Поступила в редакцию / Received 16.07.2023

Поступила после рецензирования / Revised 20.10.2023

Принята к публикации / Accepted 06.11.2023