УДК 51-74, 519.6 DOI 10.21685/2307-4205-2020-2-2

А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНТЕЗИРОВАННОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ РОБОТОВ ПРИ НАЛИЧИИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

A. I. Diveev, E. Yu. Shmalko

RESEARCH OF SYNTHESIZED OPTIMAL CONTROL FOR A GROUP OF ROBOTS IN THE PRESENCE OF UNCERTAINTIES

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается задача группового оптимального управления с фазовыми ограничениями. Для задачи характерно наличие двух видов ограничений: статических и динамических, что значительно усложняет постановку задачи и делает практически невозможным применение фундаментального принципа максимума Понтрягина ввиду коллосальной вычислительной сложности. Возникает необходимость применения численных подходов. *Материалы и методы.* Рассмотрены два альтернативных численных подхода к решению задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями. Сравнивается новый метод синтезированного оптимального управления с одним из прямых подходов на основе конечномерной оптимизации на примере решения задачи управления группой мобильных роботов в сложной среде с фазовыми ограничениями. Метод синтезированного оптимального управления основывается на многоточечной стабилизации относительно некоторых оптимально расположенных точек в пространстве состояний. Предполагается, что такой подход, включающий в себя дополнительный этап синтеза системы стабилизации, позволит увеличить надежность работы системы даже при наличии помех или иных малых возмущений. *Результаты.* Представлена численная реализация рассматриваемых методов. Полученные решения исследуются при наличии шума и неопределенностей в модели и начальных условиях. Введение в модель объекта управления случайной составляющей в виде шума показало, что метод синтезированного оптимального управления оказался менее чувствительным к неточностям модели и случайным помехам в начальных условиях. *Выводы.* Особенность метода синтезированного оптимального управления состоит в решении на первоначальном этапе задачи численного синтеза системы управления обратной связи, позволяющей стабилизировать объект управления в некоторой точке пространства состояний. Это позволяет при дальнейшей практической реализации полученного на втором этапе оптимального управления нивелировать небольшие возмущения или неточности модели объ-

Abstract. *Background.* The paper considers the problem of optimal control for a group of robots with phase constraints. The problem is characterized by the presence of two types of constraints: static and dynamic, which greatly complicates the formulation of the problem and makes it practically impossible to apply the fundamental Pontryagin's maximum principle in view of colossal computational complexity. There is a need to apply numerical approaches. *Matherials and methods.* The article considers two alternative numerical approaches to solving the optimal control problem with phase constraints. A new method of synthesized optimal control is compared with one of the direct approaches based on finite-dimensional optimization using the example of solving the problem of controlling a group of mobile robots in a complex environment with phase constraints. The method of synthesized optimal control is based on multi-point stabilization with respect to several optimally located points in the state space. It is assumed that this approach, which includes an additional stage of the synthesis of the stabilization system, will increase the reliability of the system even in the presence of noise or other small disturbances. *Results.* A numerical implementation of the considered methods is presented. The obtained solutions are investigated in the presence of noise and uncertainties in the model and initial conditions. Addition of a random component in the form of noise into the model of the object showed that the method of synthesized optimal control turned out to be less sensitive to model inaccuracies and random noise in the initial conditions. *Conclusions.* A peculiarity of the synthesized optimal control method consists in solving at the initial stage the problem of numerical synthesis of a feedback control system, which makes it possible to stabilize the control object at some point in the state space. This allows for further practical implementation of the optimal control obtained in the second stage to level out small disturbances or inaccuracies in the model of the control object. In view of the fact that the model of the control object is never known exactly, such an approach seems more reliable and expedient than direct methods from the point of view of applied applications.

екта управления. Ввиду того, что модель объекта управления никогда не известна абсолютно точно, то такой подход представляется более надежным и целесообразным, чем прямые методы, с точки зрения прикладного применения.

Ключевые слова: модель, оптимальное управление с фазовыми ограничениями, принцип максимума Понтрягина, конечномерная оптимизация, пространство состояний, управление обратной связью.

Keywords: model, optimal control with phase constraints, Pontryagin maximum principle, finite-dimensional optimization, state space, feedback control.

Введение

В статье рассматривается задача оптимального управления с фазовыми ограничениями [1, 2]. Основным фундаментальным подходом к ее решению является принцип максимума Понтрягина [3]. Но на практике мы видим, что принцип максимума не так востребован по ряду объективных причин. Сам подход был разработан в 60-х гг. XX в., когда компьютерные технологии сильно отличались от современных и было важно уметь создавать аналитические решения, по крайней мере для задач небольшого размера. Современные тенденции таковы, что компьютерные технологии и численные подходы постепенно вытесняют аналитические.

Также модель объекта управления, для которой инженеры и разработчики решают задачу оптимального управления, как правило, является очень упрощенной версией самого объекта и при переносе на реальный объект результирующая траектория может перестать быть оптимальной.

Особо стоит отметить, что практикующие инженеры не управляют нестабильным объектом. Прежде всего, объекту управления обеспечивается устойчивость, и только тогда задается оптимальная траектория движения. При подходе, основанном на принципе максимума, стабильность нигде не упоминается, и поэтому полученное решение может быть чувствительным даже к небольшим отклонениям в модели, в начальных условиях, при изменении шага интегрирования.

Кроме того, обеспечение устойчивости движения относительно найденной оптимальной траектории изменяет сам объект, добавляя регулятор в модель, и, следовательно, найденная траектория не является оптимальной для новой модели стабилизированного объекта. Этот факт можно отнести к другим известным методам оптимального управления, включая динамическое программирование [4], численные методы нелинейного программирования [5].

Исходя из вышеизложенного, сегодня в огромных возможностях компьютеров применение принципа максимума для решения задачи оптимального управления постепенно теряет свою актуальность и уступает место современным численным подходам [6, 7], которые позволяют решать задачи больших размеров в сложных условиях и с учетом возможных неточностей модели.

В статье представлен подход синтезированного оптимального управления [8], основанный на обеспечении устойчивости объекта с использованием современных численных методов символьной регрессии [9, 10]. В результате синтезированного подхода получен другой тип управления. Такое управление не является внешним воздействием на объект, управление реализовано через внутреннее состояние объекта, точнее положение точки равновесия в пространстве состояний. Следовательно, неточности модели, начальные условия и другие ошибки нивелируются. Единственная трудность – это проблема синтеза [11], которая в настоящее время может быть решена численно методами символьной регрессии.

В данной статье представлено экспериментальное сравнение метода синтезированного управления с наиболее популярным прямым численным методом сведения задачи оптимального управления к нелинейному программированию [12]. Сравнение дается для группы роботов [7, 13], имеющих как динамические, так и статические фазовые ограничения. Проведено исследование полученных управлений в присутствии шумов.

Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления группой из N роботов с фазовыми ограничениями. Математическая модель объекта управления описывается следующей системой уравнений, включающей случайную компоненту, имитирующую неточность модели:

$$\dot{x}_j = 0,5(u_{1,j} + u_{2,j})\cos(\theta_j) + \beta\xi(t),$$
$$\dot{y}_j = 0,5(u_{1,j} + u_{2,j})\sin(\theta_j) + \beta\xi(t), \quad (1)$$
$$\dot{\theta}_j = 0,5(u_{1,j} - u_{2,j}) + \beta\xi(t),$$

где $j = 1,...,N$, x_j, y_j, θ_j – компоненты вектора состояния группы роботов; $\mathbf{u}_j = [u_{1,j}, u_{2,j}]^T$ – вектор управления группы роботов; β – постоянный положительный параметр; $\xi(t)$ – случайная функция, которая принимает значения от –1 до 1.

Заданы ограничения на компоненты вектора управления

$$u_i^- \le u_i^j \le u_i^+, \ i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,N}, \quad (2)$$

где u_i^-, u_i^+ – заданные значения.

Задано начальное положение каждого робота, включающее случайную компоненту с коэффициентом γ

$$x_j(0) = x_j^0 + \gamma\xi(0),$$
$$y_j(0) = y_j^0 + \gamma\xi(0), \quad (3)$$
$$\theta_j(0) = \theta_j^0 + \gamma\xi(0),$$

где γ – заданная положительная константа.

Задано целевое терминальное состояние

$$x_j(t_f) = x_j^f,$$
$$y_j(t_f) = y_j^f, \quad (4)$$
$$\theta_j(t_f) = \theta_j^f.$$

Заданы статические фазовые ограничения

$$\varphi_i(x_j, y_j) = r_i^2 - (x_i^* - x_j)^2 - (y_i^* - y_j)^2 \le 0, \ j = 1, ..., N, \quad (5)$$

где r_i, x_i^*, y_i^* – заданные параметры статических фазовых ограничений; $i = 1,...,S$, S – количество фазовых ограничений.

Учтем возможные столкновения роботов между собой в виде динамических фазовых ограничений:

$$\psi_{i,k} = d^2 - (x_i - x_k)^2 - (y_i - y_k)^2 \le 0, \quad (6)$$

где $i = 1,...N-1$, $k = i+1,...N$, d – заданная положительная величина, определяющая максимальный габаритный размер робота.

Задан критерий качества управления, минимизирующий время достижения цели и включающий штрафные функции за отклонение от терминального состояния и за нарушение фазовых ограничений:

$$J = t_f + \alpha_1\left(\sum_{j=1}^{N}(x_j(t_f) - x_j^f) + \sum_{j=1}^{N}(y_j(t_f) - y_j^f) + \sum_{j=1}^{N}(\theta_j(t_f) - \theta_j^f)\right) +$$
$$+\alpha_2\left(\int_0^{t_f}\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{S}\vartheta(\varphi_i(x_j, y_j))dt\right) + \alpha_3\left(\int_0^{t_f}\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\vartheta(\psi_{i,k})dt\right) \to \min, \quad (7)$$

где t_f – время процесса управления

$$t_f = \begin{cases} t, \text{если } t < t^+ \text{ и } \sum_{j=1}^{N} \delta_j(t) < \varepsilon, \\ t^+ - \text{иначе}, \end{cases}$$

$$\delta_j(t) = \sqrt{(x_j - x_j^f)^2 + (y_j - y_j^f)^2 + (\theta_j - \theta_j^f)^2},$$

ε – малая положительная величина; t^+ – максимально возможное время управления; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – весовые коэффициенты штрафных функций; $\vartheta(a)$ – функция Хэвисайда

$$\vartheta(a) = \begin{cases} 1, \text{ если } a > 0, \\ 0 \ - \text{иначе}. \end{cases}$$

Поставленную задачу (1)–(7) управления решаем с помощью двух подходов (прямого и синтезированного) и исследуем полученные решения на чувствительность к неточностям модели и начальных условий.

Численное решение задачи

Первоначально решим поставленную задачу (1)–(7) методом синтезированного оптимального управления.

Согласно методу [8] сначала стабилизируем объект относительно некоторой точки пространства состояний. Поскольку в рассматриваемой постановке роботы однотипны, решим задачу синтеза системы стабилизации для одного робота и без учета фазовых ограничений (5).

Для численного решения задачи синтеза системы стабилизации используем метод сетевого оператора. При численной реализации были заданы следующие условия: $j=1$, $u^- = -10$, $u^+ = 10$, $x^f = 0$, $y^f = 0$, $\theta^f = 0$, множество начальных условий $X_0 = (\mathbf{x}^{0,1} = [-5 \quad -5 \quad -\pi/2]^T$, $\mathbf{x}^{0,2} = [-5 \quad -5 \quad \pi/2]^T$, $\mathbf{x}^{0,3} = [-5 \quad 5 \quad -\pi/2]^T$, $\mathbf{x}^{0,4} = [-5 \quad 5 \quad \pi/2]^T$, $\mathbf{x}^{0,5} = [5 \quad -5 \quad -\pi/2]^T$, $\mathbf{x}^{0,6} = [5 \quad -5 \quad \pi/2]^T$, $\mathbf{x}^{0,7} = [5 \quad 5 \quad -\pi/2]^T$, $\mathbf{x}^{0,8} = [5 \quad 5 \quad \pi/2]^T)$.

В результате были получены следующие функции управления:

$$u_i = \begin{cases} u^+, \text{ если } u_i \geq u^+, \\ u^-, \text{ если } u_i \leq u^-, \; i = 1,2, \\ \tilde{u}_i \ - \text{иначе}, \end{cases} \tag{8}$$

где

$$\tilde{u}_1 = A^{-1} + \sqrt[3]{A} + \mathrm{sgn}(q_3(\theta^* - \theta))\exp(-|q_3(\theta^* - \theta)|) + \mathrm{sgn}(\theta^* - \theta) + \mu(B),$$

$$\tilde{u}_2 = \tilde{u}_1 + \sin(\tilde{u}_1) + \arctan(H) + \mu(B) + C - C^3,$$

$$A = \tanh(0.5D) + \left(B + \sqrt[3]{x^* - x}\right)^3 + C + \sin(q_3(\theta^* - \theta)),$$

$$B = G + \mathrm{sgn}(\mathrm{sgn}(x^* - x)q_2(y^* - y))\exp(-|\mathrm{sgn}(x^* - x)q_2(y^* - y)|) +$$
$$+ \sin(x^* - x) + \tanh(0,5G) + x^* - x,$$

$$C = G + \mathrm{sgn}(\mathrm{sgn}(x^* - x)q_2(y^* - y))\exp(-|\mathrm{sgn}(x^* - x)q_2(y^* - y)|) + \sin(x^* - x),$$

$$D = H + C - C^3 + \mathrm{sgn}(q_1(x^* - x)) + \arctan(q_1) + \vartheta(\theta^* - \theta),$$

$$G = \mathrm{sgn}(x^* - x)q_2(y^* - y) + q_3(\theta^* - \theta) + \tanh(0,5q_1(x^* - x)),$$

$$H = \arctan(q_1(x^* - x)) + \mathrm{sgn}(W)\sqrt{|W|} + W + V + 2\,\mathrm{sgn}(W + \tanh(0,5V)) +$$
$$+ \sqrt[3]{W + \tanh(0,5V) + \sqrt[3]{x^* - x}} + \mathrm{sgn}(x^* - x)\sqrt{|x^* - x|} + \sqrt[3]{x^* - x} + \tanh(0,5V),$$

$$W = \mathrm{sgn}(x^* - x) + \mathrm{sgn}(q_2(y^* - y))\,\mathrm{sgn}(x^* - x)Q\,,$$

$$V = q_3(\theta^* - \theta) + \mathrm{sgn}(x^* - x)q_2(y^* - y) + Q\,,\ Q = \tanh(0,5(x^* - x))\,,$$

$$\mu(\alpha) = \max\{0, \alpha\}\,,\ \tanh(\alpha) = \frac{1 - \exp(-2\alpha)}{1 + \exp(-2\alpha)}\,,$$

$$q_1 = 11,72876\,,\ q_2 = 2,02710\,,\ q_3 = 4,02222\,.$$

Полученные функции управления (8), обеспечивающие стабилизацию объекта, подставляем в уравнения модели (1) и далее для получения оптимальных траекторий движения роботов находим K векторов $(\overline{x}^1, \overline{y}^1, \overline{\theta}^1), \ldots, (\overline{x}^K, \overline{y}^K, \overline{\theta}^K)$ точек стабилизации.

Для поиска оптимального расположения точек стабилизации используем эволюционный алгоритм роя частиц [14]. В рассматриваемой задаче использовали следующие значения параметров: количество роботов $N = 4$, величина интервала $\Delta t = 0,7$, при максимально допустимом времени управления $t^+ = 2,5$, количество точек стабилизации для каждого робота $K = 3$, количество фазовых ограничений $S = 4$, координаты центра и габаритные параметры ограничений $r_i = 2,5$, $i = 1,2,3,4$, $x_1^* = 2$, $y_1^* = 5$, $x_2^* = 5$, $y_2^* = 8$, $x_3^* = 5$, $y_3^* = 8$, $x_4^* = 5$, $y_4^* = 2$, $d = 2$. Значения искомых компонент векторов точек стабилизации имели следующие ограничения: $\overline{x}_i^+ = 12$, $\overline{y}_i^+ = 12$, $\overline{\theta}_i^+ = \pi/2$, $\overline{x}_i^- = -1$, $\overline{y}_i^- = -1$, $\overline{\theta}_i^- = -\pi/2$. Начальные условия для роботов имели следующие значения: $x_0^1 = 0$, $y_0^1 = 0$, $\theta_0^1 = 0$, $x_0^2 = 0$, $y_0^2 = 10$, $\theta_0^2 = 0$, $x_0^3 = 10$, $y_0^3 = 0$, $\theta_0^3 = 0$, $x_0^4 = 10$, $y_0^4 = 10$, $\theta_0^2 = 0$, терминальные условия: $x_f^1 = 10$, $y_f^1 = 10$, $\theta_f^1 = 0$, $x_f^2 = 10$, $y_f^2 = 0$, $\theta_f^2 = 0$, $x_f^3 = 0$, $y_f^3 = 10$, $\theta_f^3 = 0$, $x_f^4 = 0$, $y_f^4 = 0$, $\theta_f^2 = 0$.

В результате было получено следующее оптимальное решение:

$$\overline{\mathbf{x}}^1 = [-0.989, 10.404, -0.535]^T,\ \overline{\mathbf{x}}^2 = [5.998, 5.535, -1.214]^T,$$

$$\overline{\mathbf{x}}^3 = [1.572, 0.381, -0.584]^T,\ \overline{\mathbf{x}}^4 = [9.711, 7.629, -0.069]^T,$$

$$\overline{\mathbf{x}}^5 = [7.003, 5.010, 0.782]^T,\ \overline{\mathbf{x}}^6 = [5.107, 2.345, 0.148]^T,$$

$$\overline{\mathbf{x}}^7 = [7.081, 6.193, -0.035]^T,\ \overline{\mathbf{x}}^8 = [4.613, 3.878, 0.082]^T,$$

$$\overline{\mathbf{x}}^9 = [7.009, 4.984, -0.765]^T,\ \overline{\mathbf{x}}^{10} = [9.442, 2.000, -0.184]^T,$$

$$\overline{\mathbf{x}}^{11} = [7.776, 2.214, -1.215]^T,\ \overline{\mathbf{x}}^{12} = [7.394, 2.422, -0.465]^T.$$

График траекторий движения всех четырех роботов на плоскости приведен на рис. 1. Значение функционала составило $J = 2,8590$.

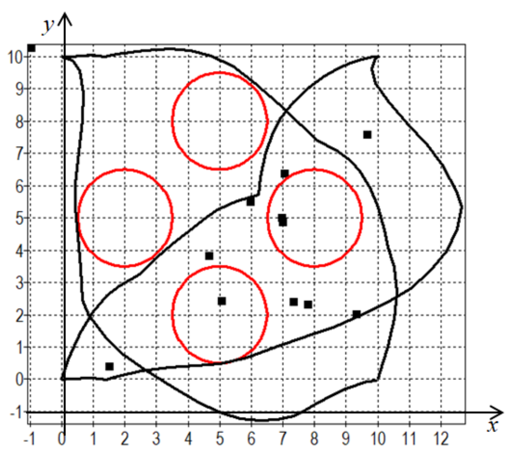

Рис. 1. Оптимальная траектории движения роботов, полученная методом синтезированного оптимального управления

Для сравнения та же самая задача оптимального управления (1)–(7) была решена прямым методом. Управление аппроксимировалось кусочно-линейной функцией на интервалах

$$u_i^j = \begin{cases} u_i^+, \text{ если } q(t,j,k,\Delta t) \ge u_i^+, \\ u_i^-, \text{ если } q(t,j,k,\Delta t) \le u_i^-, \\ q(t,j,k,\Delta t) \text{ иначе}, \end{cases} \quad (9)$$

где

$$q(t,j,k,\Delta t) = q_{(i-1)M+k}(i - t/\Delta t) + q_{(i-1)M+k}(t/\Delta t - k + 1),$$

$$k\Delta t \le t < (k+1)\Delta t,\ k = 1,\dots,M,\ j = 1,\dots,8,\ M = \left[t^+/\Delta t\right].$$

Вектор параметров q имел размерность 88, значение интервала составляло 0,25 с, предельное время процесса управления составляло 2,5 с. Ограничения по параметрам были $-20 \le q_i \le 20$, $i = 1,\dots,88$.

В результате оптимизации PSO-алгоритм нашел оптимальное решение со значением функционала $J = 3{,}6100$. Траектории движения роботов представлены на рис. 2.

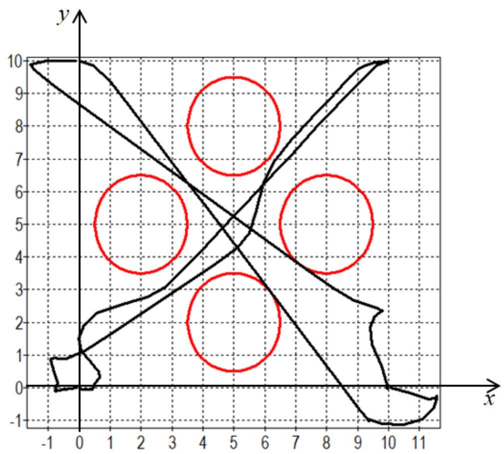

Рис. 2. Оптимальная траектории движения роботов,
полученная методом кусочно-линейной аппроксимации и алгоритмом PSO

Как видно из графиков (см. рис. 1, 2), в сложной среде с динамическими и статическими фазовыми ограничениями синтезированный подход работает лучше, чем прямой.

Исследование чувствительности к возмущениям

Теперь исследуем чувствительность полученных решений к возмущениям. Для этого мы промоделировали систему с полученными управлениями (8) и (9), увеличив коэффициенты шума β и γ.

Для каждого уровня шума мы сделали 10 тестов, определяющих средние значения функционала (7). Таблица 1 содержит результаты для возмущений в модели, а табл. 2 – для возмущений в начальных условиях. Траектории движения роботов с тем же оптимальным управлением (8) и (9), полученным прямым и синтезированным подходами, но при наличии шума, представлены на рис. 3–6.

Таблица 1

Значения функционала качества для полученных решений в присутствии возмущений в модели

β	Синтезированное управление	Кусочно-линейная аппроксимация
0	2,9840	4,8833
5	3,5094	6,7903
10	3,8064	10,0581

Таблица 2

Значения функционала качества для полученных решений
в присутствии возмущений в начальных условиях

γ	Синтезированное управление	Кусочно-линейная аппроксимация
0.1	3,5309	5,2930
0.5	5,7881	9,9566
1	7,1876	11,4535

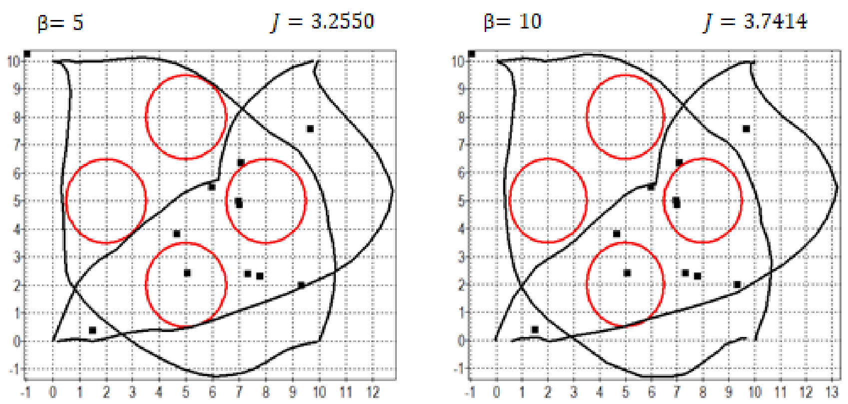

Рис. 3. Оптимальная траектория движения роботов, полученная методом синтезированного оптимального управления, при наличии возмущений в модели объекта управления

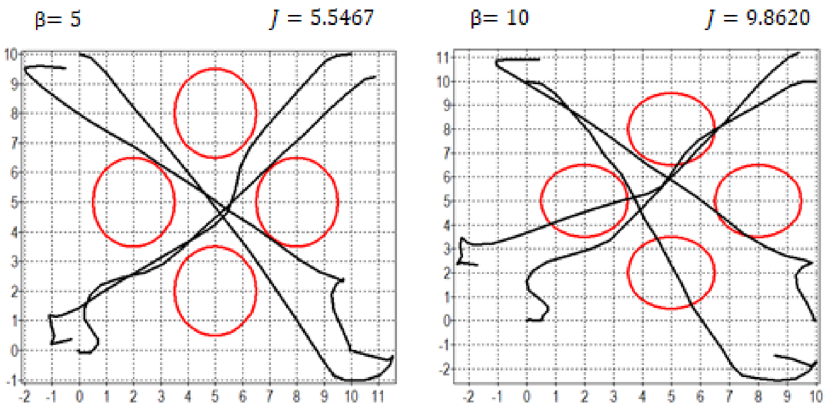

Рис. 4. Оптимальная траектория движения роботов, полученная методом кусочно-линейной аппроксимации и алгоритмом PSO, при наличии возмущений в модели объекта управления

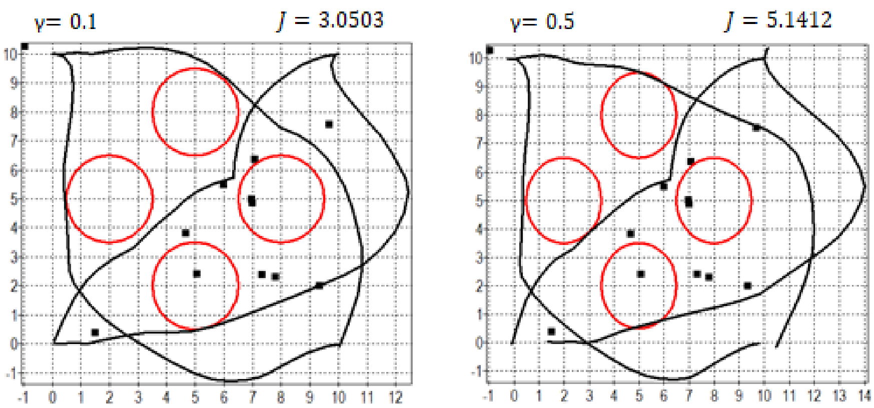

Рис. 5. Оптимальная траектория движения роботов, полученная методом синтезированного оптимального управления, при наличии возмущений в начальных условиях

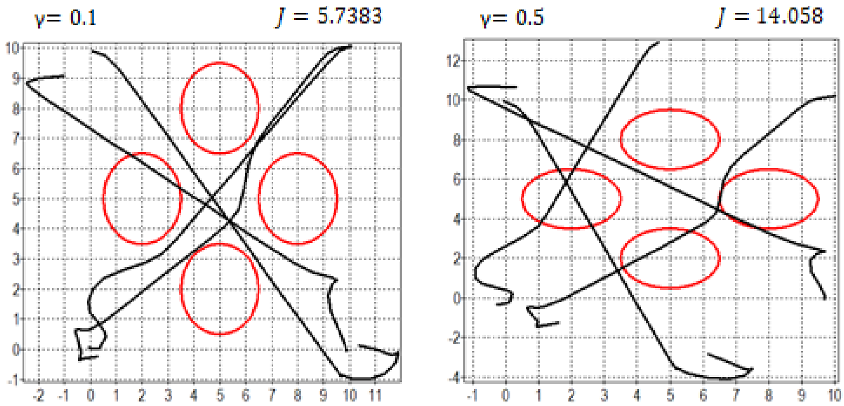

Рис. 6. Оптимальная траектория движения роботов, полученная методом кусочно-линейной аппроксимации и алгоритмом PSO, при наличии возмущений в начальных условиях

Заключение

В заключение мы хотели бы подчеркнуть, что реальный объект всегда отличается от его математической модели. Также в модель объекта вносятся изменения при добавлении разработчиками системы стабилизации. В работе представлено сравнение непрямого подхода к оптимальному управлению на основе синтеза системы стабилизации с прямым методом линейно-кусочной аппроксимации. Исследование полученных управлений на чувствительность к возмущениям показало меньшую чувствительность к возмущениям системы с синтезированным управлением, особенно при возмущениях в начальных условиях. Данные результаты подтверждают предположение о том, что управление стабилизированным объектом дает большую точность отработки управляющих воздействий, обеспечивая высокую надежность работы системы в целом.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда № 19-11-00258.

Библиографический список

1. *Арутюнов*, *А. В.* Условия нормальности принципа максимума при наличии фазовых ограничений / А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2019. – № 21. – С. 28–34.
2. *Дмитрук, А. В.* Аппроксимационная теорема для нелинейной управляемой системы со скользящими режимами / А. В. Дмитрук // Труды МИРАН. – 2007. – Т. 256. – С. 102–114.
3. *Понтрягин*, *Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – 4-е изд. – Москва : Наука, Главное редакция физико-математической литературы, 1983. – 392 с.
4. *Bellman, R. E.* Dynamic Programming and Feedback Control / R. E. Bellman, R. E. Kalaba // The First International Congress on Automatic in Moscow. – 1960. – P. 16.
5. *Квасов*, *Д. Е.* Методы липшицевой глобальной оптимизации в задачах управления / Д. Е. Квасов, Я. Д. Сергеев // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 9. – С. 3–19.
6. *Diveev*, *A. I.* Study of the Practical Convergence of Evolutionary Algorithms for the Optimal Program Control of a Wheeled Robot / A. I. Diveev, S. V. Konstantinov // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2018. – Vol. 57, № 4. – P. 561–580.
7. *Дивеев*, *А. И.* Синтез системы управления группой роботов методом сетевого оператора / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 4. – С. 198.
8. *Дивеев*, *А. И.* Метод синтезированного оптимального управления для группы роботов / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Надежность и качество сложных систем. – 2018. – № 4 (24). – С. 40–47.
9. *O’Reilly*, *U.* Genetic Programming: Theory and Practice / U. O’Reilly, T. Yu, R. Riolo, B. Worzel // Genetic Programming Theory and Practice II. Genetic Programming. – Boston, MA : Springer, 2005. – Vol 8. – P. 17–27.
10. *Дивеев*, *А. И.* Классические методы символьной регрессии для поиска структур математических выражений (обзор) / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2018. – № 20. – С. 100–132.
11. *Gill*, *P. E.* Practical Optimization / P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright. – Academic Press, 1981. – 418 p.
12. *Дивеев*, *А. И.* Синтез системы управления на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий методом сетевого оператора / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Надежность и качество сложных систем. – 2014. – № 4 (8). – С. 3–10.

13. *Дивеев*, *А. И.* Повышение надежности систем управления группой объектов за счет автоматизации процесса их синтеза / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2016. – Т. 1. – С. 160–163.
14. *Kennedy*, *J.* Particle Swarm Optimization / J. Kennedy, R. Eberhart // Proc. of IEEE International Conference on Neural Networks. – Perth, Australia, 1995. – P. 1942–1948.

References

1. Arutyunov A. V., Karamzin D. Yu. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoychivosti system* [Questions of the theory of security and stability of systems]. 2019, no. 21, pp. 28–34. [In Russian]
2. Dmitruk A. V. *Trudy MIRAN* [Works of MIRAN]. 2007, vol. 256, pp. 102–114. [In Russian]
3. Pontryagin L. S., Boltyanskiy, V. G., Gamkrelidze, R. V., Mishchenko, E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. 4th ed. Moscow: Nauka, Glavnoe redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1983, 392 p. [In Russian]
4. Bellman R. E., Kalaba R. E. *The First International Congress on Automatic in Moscow*. 1960, p. 16.
5. Kvasov D. E., Sergeev Ya. D. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and remote control]. 2013, no. 9, pp. 3–19. [In Russian]
6. Diveev A. I., Konstantinov S. V. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2018, vol. 57, no. 4, pp. 561–580.
7. Diveev A. I., Shmal'ko E. Yu. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya* [Modern problems of science and education]. 2014, no. 4, p. 198. [In Russian]
8. Diveev A. I., Shmal'ko E. Yu. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2018, no. 4 (24), pp. 40–47. [In Russian]
9. O'Reilly U., Yu T., Riolo R., Worzel B. *Genetic Programming Theory and Practice II. Genetic Programming*. Boston, MA: Springer, 2005, vol 8, pp. 17–27.
10. Diveev A. I., Shmal'ko E. Yu. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoychivosti system* [Questions of the theory of security and stability of systems]. 2018, no. 20, pp. 100–132. [In Russian]
11. Gill P. E., Murray W., Wright M. H. *Practical Optimization*. Academic Press, 1981, 418 p.
12. Diveev A. I., Shmal'ko E. Yu. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2014, no. 4 (8), pp. 3–10. [In Russian]
13. Diveev A. I., Shmal'ko E. Yu. *Trudy Mezhdunarodnogo simpoziuma Nadezhnost' i kachestvo* [Proceedings of The international Symposium Reliability and quality]. 2016, vol. 1, pp. 160–163. [In Russian]
14. Kennedy J., Eberhart R. *Proc. of IEEE International Conference on Neural Networks*. Perth, Australia, 1995, pp. 1942–1948.

Дивеев Асхат Ибрагимович
доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник,
начальник отдела управления
робототехническими устройствами,
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 42, корп. 2)
E-mail: aidiveev@mail.ru

Diveev Askhat Ibragimovich
doctor of technical sciences, professor,
chief researcher, head of the department
of robotics control,
Federal Research Center "Computer Science
and Control" of the Russian Academy of Sciences
(42/2 Vavilova street, Moscow, Russia)

Шмалько Елизавета Юрьевна
кандидат технических наук,
старший научный сотрудник,
отдел управления робототехническими
устройствами,
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 42, корп. 2)
E-mail: e.shmalko@gmail.com

Shmalko Elizaveta Yurievna
candidate of technical sciences, senior researcher,
department of robotics control,
Federal Research Center "Computer Science
and Control" of the Russian Academy of Sciences
(42/2 Vavilova street, Moscow, Russia)

Образец цитирования:

Дивеев, А. И. Исследование синтезированного оптимального управления группой роботов при наличии неопределенностей / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Надежность и качество сложных систем. – 2020. – № 2 (30). – С. 10–19. – DOI 10.21685/2307-4205-2020-2-2.