УДК 519.61 **DOI 10.21685/2307-4205-2020-4-2**

Н. И. Земцова

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ МНОГИХ ТЕЛ

N. I. Zemtsova

NEW SOLUTIONS IN THE MANY – BODY PROBLEM

Аннотация. Доказано существование 5-параметрического семейства точных решений дифференциальных уравнений движения в проблеме (n+1) – тел в случае произвольного закона притяжения, зависящего от взаимных расстояний. Геометрический образ данного решения представляет правильный многоугольник с центром P_0. Тела $P_0, P_1, ..., P_n$ с массами $m_0, m_1 = m_2 = ... = m_n = m, n \geq 2$, находящиеся в вершинах многоугольника, вращаются по коническому сечению или движутся по радиусу от центра или к центру в зависимости от начальных условий. При этом решении сохраняется подобие начальной конфигурации при любом t. Рассмотрены радиальные симметричные решения пространственной ньютоновой проблемы многих тел. Такие радиальные решения существуют при условии, что начальные скорости всех тел, находящихся в вершинах правильных многогранников, направлены вдоль соответствующего радиуса-вектора от геометрического центра фигуры или к этому центру.

Ключевые слова: динамические системы, дифференциальные уравнения, симметричные решения, проблема многих тел.

Abstract. We prove the existence of a 5-parametric family of exact solutions of differential equations of motion in (n+1) – body problem in the case of an arbitrary law of attraction that depends on mutual distances. The geometric image of this solution is a regular polygon with the center P_0. Bodies $P_0, P_1, ..., P_n$ with masses $m_0, m_1 = m_2 = ... = m_n = m, n \geq 2$, located at the vertices of the polygon, rotate in a conical section or move in radius from the center or to the center, depending on the initial conditions. In this case, the solution remains similar to the initial configuration for any t. Radial symmetric solutions of the spatial Newton many body problem are considered. Such radial solutions exist provided that the initial velocities of all the bodies, located at the vertices of regular polyhedra, are directed along the corresponding radius vector from the geometric center of the figure or to this center.

Keywords: dynamical systems, differential equations, symmetric solutions, the many-body problem.

Фундаментальной и, к сожалению, до конца не решенной проблемой для науки является проблема устойчивости, безопасности, живучести сложных динамических систем, к которым, безусловно, относятся и гамильтоновы системы, описывающие задачи космической динамики.

Геометрический образ любого решения динамической системы представляет собой некоторую конфигурацию. Особый интерес всегда вызывали решения, обладающие свойствами симметрии и подобия [1, 2], а среди них – гомографические решения. По определению Уинтнера [3], решение задачи n тел называется гомографическим, если конфигурация, образованная этими телами, подобна себе самой для всех $t \geq 0$.

В работах [4, 5] показано, что в плоской ньютоновой проблеме (n+1) – тел $P_0, P_1, ..., P_n$ с массами $m_0, m_1 = m_2 = ... = m_n = m, n \geq 2$, образующих в начальный момент правильный многоугольник с центром P_0, существует 4-параметрическое семейство точных решений, геометрически изображаемых вращающимся вокруг центра P_0 многоугольником, каждая из вершин которого движется по коническому сечению.

Представленные исследования являются обобщением указанных результатов. Доказано существование 5-параметрического семейства точных решений дифференциальных уравнений движения в проблеме (n+1) – тел в случае произвольного закона притяжения, зависящего от взаимных расстояний, т.е. взаимно притягивающих друг друга по закону $F_{ks} \sim \Delta_{ks}^{-(\alpha+1)}$, где F_{ks} – сила взаимного притяжения тел P_k и P_s, Δ_{ks} – их взаимное расстояние, α – произвольный числовой параметр, характеризующий гравитационное потенциальное поле. Рассмотрены также симметричные решения пространственной задачи многих тел.

Дифференциальные уравнения движения тел $P_1,...,P_n$, имеющих одну и ту же массу *m*, относительно тела P_0, находящегося в начале координат, в полярных координатах, как и для ньютоновой проблемы, имеют вид [6]

$$\begin{gathered}\ddot{\rho}_k - \rho_k\dot{\lambda}_k^2 + \frac{f\alpha(m_0+m)}{\rho_k^{\alpha+1}} = f\alpha m\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq k}}^{n}\left[\frac{\rho_s\cos(\lambda_s-\lambda_k)-\rho_k}{\Delta_{ks}^{\alpha+1}} - \frac{\cos(\lambda_s-\lambda_k)}{\rho_s^{\alpha+1}}\right],\\ \rho_k\ddot{\lambda}_k + 2\dot{\rho}_k\dot{\lambda}_k = f\alpha m\sum_{\substack{s=1,\\ s\neq k}}^{n}\left(\frac{\rho_s}{\Delta_{ks}^{\alpha+2}} - \frac{1}{\rho_s^{\alpha+1}}\right)\sin(\lambda_s-\lambda_k),\end{gathered} \qquad (1)$$

где *f* – постоянная тяготения, $\Delta_{ks}^2 = \rho_s^2 + \rho_k^2 - 2\rho_s\rho_k\cos(\lambda_s-\lambda_k)$, $k=\overline{1,n}$, $s \neq k$.

Общий порядок системы уравнений (1) равен 4*n*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Решение системы (1), определяемое начальными условиями*

$$\rho_k(0)=a_0,\quad \dot{\rho}_k(0)=b_0,\quad \lambda_k(0)=\frac{2\pi(k-1)}{n},\quad \dot{\lambda}_k(0)=\omega_0,\quad k=\overline{1,n}, \qquad (2)$$

одновременно является решением n одинаковых систем 4-го порядка вида

$$\begin{gathered}\ddot{\rho}-\rho\dot{\lambda}^2 = -A_n\rho^{-(\alpha+1)},\\ \rho\ddot{\lambda}+2\dot{\rho}\dot{\lambda}=0,\end{gathered} \qquad (3)$$

с начальными условиями

$$\rho(0)=a_0,\quad \dot{\rho}(0)=b_0,\quad \lambda(0)=0,\quad \dot{\lambda}(0)=\omega_0. \qquad (4)$$

Здесь

$$\rho(t)=\rho_1(t)=...=\rho_n(t),\quad \lambda(t)=\lambda_1(t),$$

$$A_n = f\alpha\left[m_0 + m\,2^{-(\alpha+1)}\sum_{s=2}^{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-\alpha}\right], \qquad (5)$$

а $a_0>0$, b_0, ω_0 *– произвольные параметры.*

Доказательство. Как и в работе [2], введем новые переменные u_k, v_k:

$$u_k=\rho_k-\rho,\quad v_k=\lambda_k-\lambda,\quad k=2,...,n. \qquad (6)$$

В новых переменных система (1) имеет вид

$$\begin{gathered}\ddot{\rho}-\rho\dot{\lambda}^2 = -\frac{f\alpha(m_0+m)}{\rho^{\alpha+1}} + f\alpha m\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)\cos v_s-\rho}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}} - \frac{\cos v_s}{(\rho+u_s)^{\alpha+1}}\right],\\ \rho\ddot{\lambda}+2\dot{\rho}\dot{\lambda} = f\alpha m\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}} - \frac{1}{(\rho+u_s)^{\alpha+1}}\right]\sin v_s;\end{gathered} \qquad (7')$$

$$\ddot{u}_k-\rho(2\dot{\lambda}v_k+v_k^2)-u_k(\dot{\lambda}+v_k)^2=-f\alpha(m_0+m)\left[\frac{1}{(\rho+u_k)^{\alpha+1}}-\frac{1}{\rho^{\alpha+1}}\right]+$$

$$+f\alpha m\sum_{i=1,i\neq k}^{n}\left[\frac{(\rho+u_i)\cos(v_i-v_k)-(\rho+u_k)}{\Delta_{ki}^{\alpha+2}}-\frac{\cos(v_i-v_k)}{(\rho+u_i)^{\alpha+1}}\right]-f\alpha m\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u_s)\cos v_s-\rho}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}}-\frac{\cos v_s}{(\rho+u_s)^{\alpha+1}}\right],$$

$$\rho\ddot{v}_k+u_k(\ddot{\lambda}+\ddot{v}_k)+2\dot{\rho}\dot{v}_k+2\dot{u}_k(\dot{\lambda}+\dot{v}_k)=f\alpha m\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}\left[\frac{\rho+u_i}{\Delta_{ki}^{\alpha+2}}-\frac{1}{(\rho+u_i)^{\alpha+1}}\right]\sin(v_i-v_k)- \qquad (7'')$$

$$-f\alpha m\sum_{\substack{s=2,\\ s\neq k}}^{n}\left[\frac{\rho+u_s}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}}-\frac{1}{(\rho+u_s)^{\alpha+1}}\right]\sin v_s,$$

$$\Delta_{ki}^2=(\rho+u_k)^2+(\rho+u_i)^2-2(\rho+u_k)(\rho+u_i)\cos(v_i-v_k),$$

$$\Delta_{1s}^2=\rho^2+(\rho+u_s)^2-2\rho(\rho+u_s)\cos v_s,\quad k,i=\overline{1,n},\ s=\overline{2,n}.$$

Система (7) имеет тот же порядок $4n$ и состоит из двух подсистем: подсистемы 4-го порядка (7') из первых двух уравнений и подсистемы $(7'')$ порядка $4n$–4 с неизвестными функциями u_k, v_k. Покажем, что при любой дифференцируемой функции $\rho(t)$ подсистема $(7'')$ имеет частное решение

$$u_2(t)=\ldots=u_n(t)=u(t)\equiv 0,$$
$$v_k(t)=\frac{2\pi(k-1)}{n},\quad k=2,\ldots,n. \qquad (8)$$

Для этого будем искать частное решение в виде

$$u_2(t)=\ldots=u_n(t)=u(t)\equiv 0,\quad v_k(t)=\frac{2\pi(k-1)}{n}$$

с начальными условиями

$$u(0)=\dot{u}(0)=\dot{v}_k(0)=\dot{v}(0)=0,\quad v_k(0)=\frac{2\pi(k-1)}{n}.$$

Вместо подсистемы $(7'')$ получим следующую систему дифференциальных уравнений порядка $4n-4$:

$$\ddot{u}-u\dot{\lambda}^2=-f\alpha(m_0+m)\left[\frac{1}{(\rho+u)^{\alpha+1}}-\frac{1}{\rho^{\alpha+1}}\right]+f\alpha m\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}\left[\frac{(\rho+u)\cos\frac{2\pi(i-k)}{n}-(\rho+u)}{\Delta_{ki}^{\alpha+2}}-\frac{\cos\frac{2\pi(i-k)}{n}}{(\rho+u)^{\alpha+1}}\right]-$$

$$-f\alpha m\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{(\rho+u)\cos\frac{2\pi(s-1)}{n}-(\rho+u)}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}}-\frac{\cos\frac{2\pi(s-1)}{n}}{(\rho+u)^{\alpha+1}}\right],$$

$$u\ddot{\lambda}+2\dot{u}\dot{\lambda}=f\alpha m\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}\left[\frac{\rho+u}{\Delta_{ki}^{\alpha+2}}-\frac{1}{(\rho+u)^{\alpha+1}}\right]\sin\frac{2\pi(i-k)}{n}-f\alpha m\sum_{s=2}^{n}\left[\frac{\rho+u}{\Delta_{1s}^{\alpha+2}}-\frac{1}{(\rho+u)^{\alpha+1}}\right]\sin\frac{2\pi(s-1)}{n}, \qquad (9)$$

$$\Delta_{ki}=2(\rho+u)\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|,\quad \Delta_{1s}=2\sin\frac{\pi(s-1)}{n},\quad i\neq k,\ k,s=2,\ldots,n.$$

Левые части системы (9) не зависят от индекса k, поэтому необходимо доказать, что для каждого $k = 2, \ldots, n$ подсистема из двух уравнений системы (9) имеет решение

$$u(t)\equiv 0,\quad v_k(t)=\frac{2\pi(k-1)}{n}.$$

Это утверждение равносильно выполнению для любого $k = 2,\ldots,n$ следующих тождеств:

$$-2^{-(\alpha+1)}\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-\alpha}-\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}\cos\frac{2\pi(i-k)}{n}+2^{-(\alpha+1)}\sum_{s=2}^{n}\left|\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right|^{-\alpha}-\sum_{s=2}^{n}\cos\frac{2\pi(s-1)}{n}=0, \quad (10)$$

$$-2^{-(\alpha+2)}\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}\sin\frac{2\pi(i-k)}{n}\left|\sin\frac{\pi(i-k)}{n}\right|^{-(\alpha+2)}-\sum_{\substack{i=1,\\ i\neq k}}^{n}\sin\frac{2\pi(i-k)}{n}-$$

$$-2^{-(\alpha+1)}\sum_{s=2}^{n}\cos\frac{\pi(s-1)}{n}\left(\sin\frac{\pi(s-1)}{n}\right)^{-(\alpha+1)}+\sum_{s=2}^{n}\sin\frac{2\pi(s-1)}{n}=0.$$

Справедливость этих тождеств проверяется непосредственно.

Таким образом, показано, что система уравнения (9) имеет частное решение $u(t)\equiv 0$, $v_k(t)=\dfrac{2\pi(k-1)}{n}$. Для нахождения частного решения всей системы (7) необходимо проинтегрировать подсистему (7') после подстановки в нее $u_s 0$, $v_s=\dfrac{2\pi(s-1)}{n}$ с учетом начальных условий (2).

После выполнения достаточно простых преобразований подсистема (7') принимает вид системы (3) и ее интегрирование выполняется в квадратурах. Второе уравнение системы (3) имеет первый интеграл

$$\rho^2\dot{\lambda}=d_0=a_0^2\omega_0\,. \quad (11)$$

Используя это соотношение, первое уравнение системы (3) можно записать в виде равенства

$$\ddot{\rho}=d_0^2\rho^{-3}-A_n\rho^{-(\alpha+1)}.$$

Далее будем иметь

$$\pm\sqrt{\alpha}\int\frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{2h\alpha\rho^2+2A_n\rho^{2-\alpha}-d_0^2\alpha}}=t+C_1, \quad (12)$$

где $2h=b_0^2+a_0^2\,\omega_0^2-2A_n\alpha^{-1}a_0^{-\alpha}$, C_1– произвольная постоянная.

Из выражения (11) в принципе можно найти зависимость полярного угла λ как функции t:

$$\lambda(t)=d_0\int\frac{dt}{\rho^2(t)}. \quad (13)$$

Зависимость $\lambda=\lambda(\rho)$ выражается интегралом, являющимся уравнением «орбиты»:

$$\lambda(\rho)=\pm d_0\sqrt{\alpha}\int\frac{d\rho}{\rho\sqrt{2h\alpha\rho^2+2A_n\rho^{2-\alpha}-d_0^2\alpha}}. \quad (14)$$

Таким образом, соотношения (12), (13) дают полное решение задачи.

Из соотношения (11) видно, что $\dot{\lambda}\neq \mathrm{const}$, т.е. многоугольник $P_1,P_2,\ldots,P_n$, оставаясь в любой момент правильным, но переменных размеров, вращается с переменной угловой скоростью вокруг геометрического центра P_0, причем угловая скорость его вращения в любой момент t определяется интегралом (13). С увеличением размеров многоугольника его угловая скорость вращения уменьшается, и наоборот.

Рассмотрим различные варианты решений этой задачи.

1. Круговые решения плоской ньютоновой проблемы.

Если $b_0=0$ и $\omega_0=\pm\sqrt{\dfrac{A_n}{a_0^3}}$, тогда правильный n-угольник со стороной $2a_0\sin\dfrac{\pi}{n}$, оставаясь инвариантным в размерах, будет вращаться вокруг центра P_0 с постоянной угловой скоростью ω_0 [4, 7, 8].

2. Радиальные решения плоской ньютоновой проблемы.

Если начальная скорость ω_0 = 0, т.е. в начальный момент начальные скорости тел $P_1, P_2, ..., P_n$ направлены коллинеарно соответствующему начальному радиусу-вектору, то величина $d_0 = 0$ и

$$\dot{\lambda}(t) \equiv 0. \tag{15}$$

Это означает, что многоугольник будет себе подобно увеличиваться или уменьшаться в размерах в соответствии с интегралом (12), но будет отсутствовать всякое вращение. В этом случае, например при $n = 4n_0$, возможно симметричное решение, в котором некоторые тела движутся сначала к центру, а другие – от центра. При $n_0 = 3$ решение изображено на рис. 1.

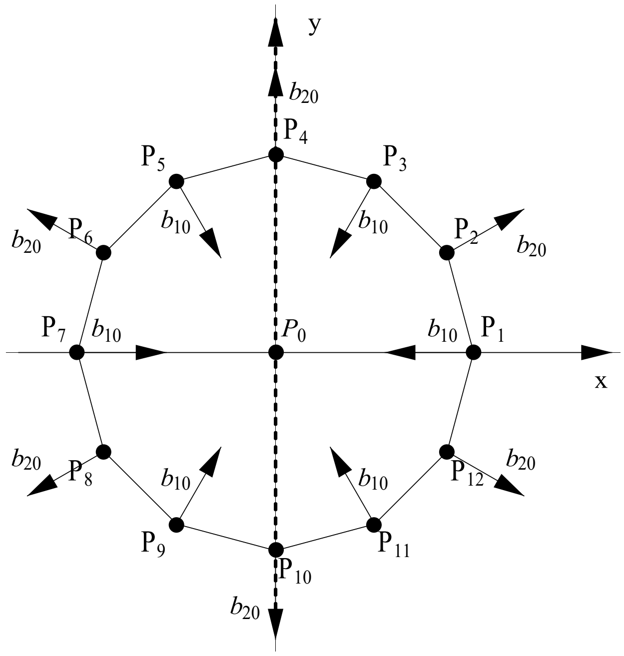

Рис. 1. Симметричное решение для $n_0 = 3$

Это решение представляет собой «выпукло-вогнутое» пространство. Для точек, имеющих начальную скорость b_{10}, следует в приближенном для этого случая соотношении (3) взять знак минус, а для точек с начальной скоростью b_{20} – знак плюс.

Эта конфигурация интересна тем, что она не будет представлять собой для всех t выпуклый правильный многоугольник.

3. Симметричные решения пространственной проблемы многих тел.

Известно, что в трехмерном пространстве существует лишь пять правильных многогранников, так называемых тел Платона [9]. Это тетраэдр (число вершин – 4), куб (число вершин – 8), октаэдр (число вершин – 6), икосаэдр (число вершин – 20), додекаэдр (число вершин – 12).

Вследствие этого можно утверждать, что радиальные симметричные решения пространственной ньютоновой проблемы многих тел могут существовать, по меньшей мере, для n = 4, 6, 8, 12, 20, т.е. для проблем пяти, семи, девяти, тринадцати и двадцати одного тела, взаимно притягивающих друг друга в соответствии с законом притяжения $P_{ki} \sim \Delta_{ki}^{-2}$.

Такие радиальные решения существуют при условии, что начальные скорости всех тел, находящихся в вершинах перечисленных многогранников, направлены вдоль соответствующего радиуса-вектора от геометрического центра фигуры (начала координат $-P_0$) или к этому центру [10–12].

Дифференциальное уравнение движения каждого из n-тел вдоль радиуса-вектора имеет вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \frac{f[m_0 + A(m,n)}{r^2} = 0, \tag{16}$$

где параметрическая функция $A(m,n)$ для каждого многогранника различна. Например, для куба

$$A(m,8)=\frac{(3\sqrt{3}+3\sqrt{6}+\sqrt{2})m}{4\sqrt{2}}. \tag{17}$$

Уравнение (16) необходимо решать с учетом начальных условий

$$r(0)=a_0, \quad \dot{r}(0)=b_0. \tag{18}$$

Если $b_0>0$, то соответствующий многогранник будет подобно себе расширяться (по крайней мере на начальном отрезке времени, а при достаточно больших значениях b_0 будет постоянно расширяться. Если же $b_0<0$, многогранник будет подобно себе уменьшаться в размерах до полного вырождения в точку, а при некотором $t^*>0$ наступит одновременное соударение всех точек в начале координат P_0.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-29-03061-мк).

Библиографический список

1. *Северцев, Н. А.* Модели программного обеспечения в безопасном и надежном функционировании сложной космической системы / Н. А. Северцев // Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 4. – С. 5–13.
2. *Лагранж, Ж.* Аналитическая механика / Ж. Лагранж. – Москва : Наука, 1957.
3. *Уинтнер, А.* Аналитические основы небесной механики / А. Уинтнер. – Москва : Наука, 1967.
4. *Гребеников, Е. А.* Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел / Е. А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкин, М. Якубяк. – Москва : Из-во РУДН, 2002.
5. *Гребеников, Е. А.* Математические проблемы гомографической динамики / Е. А. Гребеников. – Москва : МАКС Пресс, 2010.
6. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / под ред. Г. Н. Дубошина. – Москва : Наука, 1976.
7. *Elmabsout, B.* Stability of Some Degenerate Positions of Relative Equilibrium in the *n* – Body Problem / B. Elmabsout // Dynamics and Stability of System. – 1994. – Vol. 9, № 4. – P. 305–319.
8. *Prokopenya, A. N.* Symbolic-numerical analysis of the relative equilibria stability in the planar circular restricted four-body problem / A. N. Prokopenya // Lecture notes in computer science. – Springer-Verlag GmbH, 2017. – V. 10490 LNCS. – P. 329–345.
9. *Александров, А. Д.* Выпуклые многогранники / А. Д. Александров. – Москва ; Ленинград : ГИТТЛ, 1950.
10. *Журавлев, С. Г.* Гомотетические радиальные решения ньютоновой общей пространственной задачи *n* + 1 тел / С. Г. Журавлев // Прикладная математика и механика. – 2016. – Т. 80, № 1. – С. 46–50.
11. *Земцова, Н. И.* Новые гомографические решения в пространственной ньютоновой проблеме шести тел / Н. И. Земцова // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. – Москва : ВЦ РАН, 2013. – С. 95–99.
12. *Диарова, Д. М.* Компьютерное моделирование в качественных исследованиях динамических систем / Д. М. Диарова, Н. И. Земцова // Фундаментально-прикладные проблемы безопасности, живучести, надежности, устойчивости и эффективности систем : сб. – Елец : ЕГУ им. И. А. Бунина, 2017. – С. 154–160.

References

1. Severtsev N. A. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2019, no. 4, pp. 5–13. [In Russian]
2. Lagranzh Zh. *Analiticheskaya mekhanika* [Analytical mechanics]. Moscow: Nauka, 1957. [In Russian]
3. Uintner A. *Analiticheskie osnovy nebesnoy mekhaniki* [Analytical foundations of celestial mechanics]. Moscow: Nauka, 1967. [In Russian]
4. Grebenikov E. A., Kozak-Skovorodkin D., Yakubyak M. *Metody komp'yuternoy algebry v probleme mnogikh tel* [Computer algebra methods in the many-body problem]. Moscow: Iz-vo RUDN, 2002. [In Russian]
5. Grebenikov E. A. *Matematicheskie problemy gomograficheskoy dinamiki* [Mathematical problems of homographic dynamics]. Moscow: MAKS Press, 2010. [In Russian]
6. *Spravochnoe rukovodstvo po nebesnoy mekhanike i astrodinamike* [Reference guide to celestial mechanics and astrodynamics]. Ed. by G. N. Duboshin. Moscow: Nauka, 1976. [In Russian]
7. Elmabsout B. *Dynamics and Stability of System*. 1994, vol. 9, no. 4, pp. 305–319.

8. Prokopenya A. N. *Lecture notes in computer science*. Springer-Verlag GmbH, 2017, vol. 10490 LNCS, pp. 329–345.
9. Aleksandrov A. D. *Vypuklye mnogogranniki* [Convex polyhedra]. Moscow; Leningrad: GITTL, 1950. [In Russian]
10. Zhuravlev S. G. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics]. 2016, vol. 80, no. 1, pp. 46–50. [In Russian]
11. Zemtsova N. I. *Teoreticheskie i prikladnye zadachi nelineynogo analiza*n [Theoretical and applied problems of nonlinear analysis]. Moscow: VTs RAN, 2013, pp. 95–99. [In Russian]
12. Diarova D. M., Zemtsova N. I. *Fundamental'no-prikladnye problemy bezopasnosti, zhivuchesti, nadezhnosti, ustoychivosti i effektivnosti sistem: sb.* [Fundamental and applied problems of safety, survivability, reliability, stability and efficiency of systems: coll.]. Elets: EGU im. I. A. Bunina, 2017, pp. 154–160. [In Russian]

Земцова Надежда Ивановна
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, д. 44, корп. 2)
E-mail: zemni@yandex.ru

Zemtsova Nadezhda Ivanovna
candidate of physical and mathematical sciences,
senior researcher,
Federal reseach center
"Computer Science and Management"
of the Russian Academy of Sciences
(building 2, 44 Vavilova street, Moscow, Russia)

Образец цитирования:

Земцова, Н. И. Новые решения в проблеме многих тел / Н. И. Земцова // Надежность и качество сложных систем. – 2020. – № 4 (32). – С. 15–21. – DOI 10.21685/2307-4205-2020-4-2.