ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОСНОВЫ БЕЗОПАСНОСТИ, НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА

УДК 62-50, 519-714

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ МЕТОДОМ СЕТЕВОГО ОПЕРАТОРА[1]

А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько

Введение

В работе рассматривается задача синтеза системы управления. Задача заключается в нахождении управления в виде многомерной функции, описывающей функциональную зависимость вектора управления от вектора состояния объекта. Последние достижения в области алгоритмизации, в частности метод сетевого оператора [1–6], позволяют создавать вычислительные методы для решения задачи синтеза управления.

В настоящей работе рассматривается вычислительный метод синтеза системы управления, состоящий из двух этапов. На первом этапе решаем задачи оптимального управления для каждого начального состояния из заданного дискретного множества начальных условий. Для решения задачи оптимального управления используем вычислительный метод, построенный на основе вариационного генетического алгоритма. После решения каждой задачи оптимального управления получаем оптимальные значения управления и оптимальные траектории движения объекта. На втором этапе решаем методом сетевого оператора задачу аппроксимации множества точек оптимальных траекторий.

В качестве прикладного примера в работе рассматривается задача управления спуском космического аппарата на поверхность Луны [6].

Формальная постановка задачи

Рассмотрим формальную постановку задачи синтеза системы управления.

Задана математическая модель объекта управления

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}$ – вектор состояния объекта управления; $\mathbf{u}$ – вектор управления, $\mathbf{x} \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathrm{U} \subseteq \mathrm{R}^m$, $\mathbf{x} = [x_1 \ldots x_n]^T$, $\mathbf{u} = [u_1 \ldots u_m]^T$, U – ограниченное замкнутое множество.

Для системы (1) задано множество начальных значений

$$\mathbf{x}(0) \in \mathrm{X}_0 \subseteq \mathrm{R}^n, \quad (2)$$

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-08-00008а.

Заданы терминальные условия

$$\phi_i\left(\mathbf{x}\left(t_f\right)\right) = 0,\ i = \overline{1,l}, \tag{3}$$

где t_f – время окончания процесса управления.

Задан критерий качества управления

$$J = \int_0^{t_f} f_0\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)dt \to \min. \tag{4}$$

Необходимо найти управление в виде

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

где $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ – многомерная функция, удовлетворяющая условиям

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m, \tag{6}$$

$$\tilde{\mathbf{h}}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^0, t\right)\right) \in \mathrm{U}, \tag{7}$$

$$\int_0^{t_f} f_0\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^0, t\right), \tilde{\mathbf{h}}\left(\tilde{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^0, t\right)\right)\right)dt = \min_{\mathbf{u}\in\mathrm{U}} \int_0^{t_f} f_0\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)dt, \tag{8}$$

где $\tilde{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^0, t\right)$ – решение системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})\right), \tag{9}$$

при начальных условиях $\forall \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \in \mathrm{X}_0$.

Для решения задачи синтеза (1)–(8) можно использовать численный метод сетевого оператора, подробно описанный в работах [1–6]. Метод обеспечивает поиск решения в форме (5) по критерию оптимизации (4) и терминальным условиям (3).

Если искать решение для одного конкретного начального значения

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \tag{10}$$

в виде функции времени

$$\tilde{\mathbf{u}}(\cdot) = \left(\tilde{\mathbf{u}}(t) : t \in \left[0, t_f\right]\right), \tag{11}$$

то получим задачу оптимального управления (1), (3), (4), (10), (11).

После решения задачи оптимального управления для начального значения $\mathbf{x}^0 \in \mathrm{X}_0$ решение $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ системы уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}(t)\right) \tag{12}$$

должно совпадать с решением $\tilde{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^0, t\right)$ системы уравнений (9)

$$\tilde{\mathbf{x}}\left(\mathbf{x}^0, t\right) = \tilde{\mathbf{x}}(t). \tag{13}$$

Неудовлетворение условия (13) говорит о том, что найденная в результате решения задачи синтеза функция $\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{x})$ не позволяет получать оптимальные траектории движения объекта управления, т.е. не удовлетворяет условию (8).

Для получения решения, учитывающего условие (13) близости к оптимальному решению, задачу синтеза управления решаем в два этапа. На первом этапе решаем задачи оптимального управления для множества начальных значений из заданной области (2). Сохраняем множество точек оптимальных траекторий и оптимальных значений управления. На втором этапе решаем задачу аппроксимации множества полученных точек многомерной функцией методом сетевого оператора.

Опишем формальные соотношения двухэтапного синтеза системы управления.

Заменим множество начальных условий конечным множеством точек

$$\overline{\mathrm{X}}_0 = \left\{ \mathbf{x}^{0,i} \in \mathrm{X}_0 : i = \overline{1, M} \right\}. \tag{14}$$

Решаем M задач оптимального управления для каждого начального значения из (14) и сохраняем множество точек оптимальных траекторий

$$\mathrm{T}_i = \left\{ \left(t_0, \tilde{\mathbf{x}}^i(t_0), \tilde{\mathbf{u}}^i(t_0)\right), \left(t_1, \tilde{\mathbf{x}}^i(t_1), \tilde{\mathbf{u}}^i(t_1)\right), \ldots, \left(t_K, \tilde{\mathbf{x}}^i(t_K), \tilde{\mathbf{u}}^i(t_K)\right) \right\}, \tag{15}$$

где $i = \overline{1, M}$, $t_j = j\Delta t$, $j = \overline{0, K}$, Δt – шаг дискретизации.

На первом этапе решения задачи оптимального управления используем вариационный генетический алгоритм многокритериальной оптимизации [8].

На втором этапе решаем задачу аппроксимации точек (15) многомерной функцией. Для решения задачи используем метод сетевого оператора и критерий качества аппроксимации

$$J = \sum_{i=1}^{M} \sqrt{\sum_{j=0}^{K} \left(\tilde{\mathbf{u}}^i(t_j) - \mathbf{h}\left(\tilde{\mathbf{x}}^i(t_j)\right) \right)^2} \to \min. \tag{17}$$

В качестве примера используем рассмотренный метод для решения задачи синтеза системы управления спуском космического аппарата (КА) на поверхность Луны [7].

Модель объекта управления описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dV}{dt} = W\cos(u_1 - \theta) - g\cos\theta, \tag{18}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{V}\left(W\sin(u_1 - \theta) + g\sin\theta\right), \tag{19}$$

$$\frac{dh}{dt} = V\cos\theta, \tag{20}$$

$$\frac{dL}{dt} = V\sin\theta, \tag{21}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{P_0 + u_2}{P_{ud}}, \tag{22}$$

$$W = \frac{\tilde{g}P}{m},\ g = g_0\left(\frac{R_0}{R_0 + h}\right)^2,\ R = R_0 + h,$$

где V – модуль скорости движения космического аппарата; W – ускорение, создаваемое тягой двигателя торможения; θ – угол наклона траектории относительно гравитационной вертикали; h – высота полета КА; R – модуль радиус-вектора от центра Луны до космического аппарата; R_0 – средний радиус поверхности Луны; L – дальность вдоль поверхности; m – масса КА; P – тяга коррекционно-тормозного двигателя (Н); P_{ud} – удельный импульс коррекционно-тормозного двигателя (м/с); g_0 – гравитационное ускорение свободного падения на поверхности Луны, $R_0 = 1738{,}4$ км, $P_0 = 440$ кг, $P_{ud} = 319$ с, $g_0 = 1{,}623$ м/с², $\tilde{g} = 9{,}80665$ м/с².

Заданы области начальных значений:

$$V(0) = V_0,\ \theta(0) = \theta_0,\ h(0) \in \left[h_0^-, h_0^+\right],\ \phi(0) = \phi_0,\ m(0) = m_0, \tag{23}$$

где θ_0^-, θ_0^+ – наименьшее и наибольшее начальные значения угла наклона траектории, h_0^-, h_0^+ – наименьшее и наибольшее значения начальной высоты.

Заданы терминальные условия:

$$V(t_f) \in \left[V_f^-, V_f^+\right],\ h(t_f) \in \left[h_f^-, h_f^+\right], \tag{24}$$

$$t_f = \begin{cases} t, \text{ если } \left(V(t) \in \left[V_f^-, V_f^+\right]\right) \wedge \left(h(t) \in \left[h_f^-, h_f^+\right]\right) \\ t^+ \ - \text{иначе} \end{cases}, \tag{25}$$

где V_f^-, V_f^+ – наименьшее и наибольшее терминальные значения модуля скорости, h_f^-, h_f^+ – наименьшее и наибольшее терминальные значения высоты, t^+ – максимальное время полета.

Значения компонент управления ограничены

$$u_1 \in \left[u_1^-, u_1^+\right],\ u_2 \in \left[u_2^-, u_2^+\right], \tag{26}$$

где u_i^-, u_2^+ – наименьшее и наибольшее значения компоненты управления u_i, $i = 1{,}2$.

Заданы терминальные условия

$$\left(V(t_f) - \frac{V_f^- + V_f^+}{2}\right)^2 = 0, \tag{27}$$

$$\left(h(t_f) - \frac{h_f^- + h_f^+}{2}\right)^2 = 0. \tag{28}$$

Заданы критерии качества управления

$$J_1 = \alpha\left|L_f - L(t_f)\right| + \left|h_f^- + h_f^+ - 2h(t_f)\right| \to \min, \tag{29}$$

$$J_2 = \left|V_f - V(t_f)\right| \to \min, \tag{30}$$

где α – весовой коэффициент; L_f – заданное терминальное значение дальности.

При решении задачи непрерывные интервалы начальных значений были заменены множествами точек

$$\left[h_0^-, h_0^+\right]^T \to \left\{h_{0,0}, h_{0,1}, \ldots, h_{0,k_h}\right\}, \tag{31}$$

где

$$h_{0,j} = h_0^- + j\Delta h_0, \tag{32}$$

где Δh_0 – величины приращений по углу наклона траектории и высоте.

В вычислительном эксперименте были использованы следующие параметры модели: $V(0) = 1689$ м/с, $\theta_0 = 1{,}6$ рад, $h_0^- = 16{,}648$ км, $h_0^+ = 19{,}648$ км, $\phi(0) = 0$ рад, $m(0) = 940$ кг,

$u_1^- = 0$ рад, $u_1^+ = 3{,}14159265$ рад, $u_2^- = -80$ кг, $u_2^- = +80$ кг, $V_f^- = 0$ м/с, $V_f^+ = +5$ м/с, $h_f^- = 1{,}2$ км, $h_f^+ = 1{,}8$ км, $L_f = -240$ км, $\Delta\theta_0 = 0{,}05$ рад, $\Delta h_0 = 1{,}5$ км, $k_h = 2$, $\alpha = 0{,}1$.

На первом этапе была решена задача оптимального управления для различных начальных значений, определенных соотношениями (30)–(33). Решение задачи осуществляли численно методом вариационного генетического алгоритма [8]. Для каждого оптимального решения были сохранены множества точек оптимального управления и оптимальных траекторий (15).

Затем на втором этапе по критерию (17) была решена задача синтеза системы управления методом сетевого оператора [1–6].

Для синтеза методом сетевого оператора было выбрано следующее базисное решение

$$u_i = \begin{cases} u_i^-, \text{ если } u_i \le u_i^- \\ u_i^+, \text{ если } u_i \ge u_i^+ \\ \tilde{u}_i - \text{иначе} \end{cases}, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\tilde{u}_1 = q_1^0(\pi + \theta) + \frac{q_2^0}{\bar{h}}(h_f - h)\vartheta(h_f - h),$$

$$\tilde{u}_2 = -q_3^0\theta\cos\theta, \quad \bar{h} = \frac{h_0^- + h_0^+}{2}, \quad \vartheta(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } A \ge 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

$$\pi = 3{,}14159265, \quad q_1^0 = 1, \quad q_2^0 = 1, \quad q_3^0 = 1.$$

В результате синтеза было получено следующее управление:

$$\tilde{u}_1 = \sqrt[3]{A} + \operatorname{sgn}(B)\ln(|B| + 1) + \frac{1}{C} + \frac{1 - e^{-q_3\theta}}{1 + e^{-q_3\theta}} + \vartheta(D),$$

$$\tilde{u}_2 = u_1 - u_1^3 + e^B - q_3\theta\cos(\theta) + \vartheta(q_3\theta) - q_2,$$

где

$$A = \operatorname{sgn}(z_{11})\left(e^{|z_{11}|} - 1\right) + z_{10} + \frac{(h_f - h)}{\bar{h}};$$

$$B = \frac{e^{-q_3\theta\cos(\theta)}}{q_2}\mu(z_9)\operatorname{sgn}(E)\left(e^{|E|} - 1\right);$$

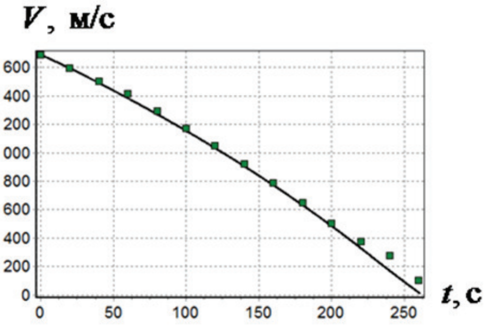
$$C = Eq_2^2\left(\operatorname{sgn}(E)\sqrt{|E|} + q_2 + \frac{(h_f - h)}{\bar{h}} + (\theta + \pi) - (\theta + \pi)^3\right);$$

$$D = \operatorname{sgn}(E)\sqrt{|E|} + q_2 + \frac{(h_f - h)}{\bar{h}} + (\theta + \pi) - (\theta + \pi)^3;$$

$$E = \frac{1 - e^{-q_2}}{1 + e^{-q_2}}q_1(\theta + \pi), \quad q_1 = 4{,}008, \quad q_2 = 6{,}927, \quad q_3 = 12{,}07.$$

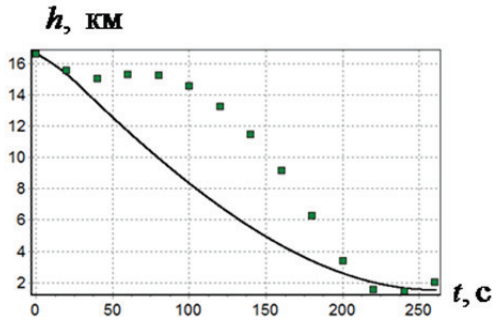
На рис. 1–3 приведены результаты моделирования полученной системы управления. На рисунках представлены графики изменения основных переменных модели, используемых в критериях качества при решении задачи оптимального управления, V, h и L, для различных начальных значений. На этих же графиках приведены точками оптимальные траектории, полученные в результате численного решения задачи оптимального управления [9–11].

Графики на рис. 1–3 получены при следующих начальных значениях: *а* – $h(0)=16,648$ км, *б* – $h(0)=19,648$ км.



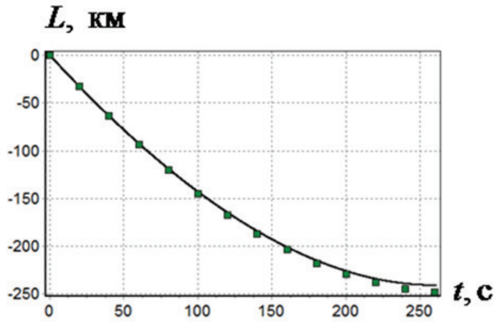
а) *б*)

Рис. 1. Скорость КА



а) *б*)

Рис. 2. Высота полета КА



а) *б*)

Рис. 3. Дальность полета КА

Из результатов моделирования видно, что полученная система управления обеспечивает движение вблизи оптимальных траекторий по скорости и дальности полета.

Заключение

Наибольшее отличие от оптимальной траектории наблюдается по изменению высоты. Несмотря на то, что отклонение от оптимальной траектории по высоте достигало 6 км, терминальные условия выполняются достаточно точно: при $h(0)=16,648$ км, $V(t_f)=5,27$ м/с, $h(t_f)=1,758$ км, $L(t_f)=-240,986$ км, при $h(0)=19,648$ км, $V(t_f)=5,45$ м/с, $h(t_f)=4,931$ км, $L(t_f)=-240,955$ км.

Список литературы

1. Дивеев, А. И. Метод сетевого оператора / А. И. Дивеев. – М. : ВЦ РАН, 2010. – 178 с.
2. Дивеев, А. И. Численный метод сетевого оператора для синтеза системы управления с неопределенными начальными значениями / А. И. Дивеев // Известия РАН ТиСУ. – 2012. – № 2. – С. 63–78.
3. Дивеев, А. И. Метод сетевого оператора и его применение в задачах управления / А. И. Дивеев, Е. А. Софронова. – М. : Изд-во РУДН, 2012. – 182 с.
4. Дивеев, А. И. Повышение качества систем управления на основе многокритериального синтеза методом сетевого оператора / А. И. Дивеев, К. А. Пупков, Е. А. Софронова // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». – 2009. – № 4. – С. 5–12.
5. Diveyev, A. I. Application of network operator method for synthesis of optimal structure and parameters of automatic control system / A. I. Diveyev, E. A. Sofronova // Proceedings of 17-th IFAC World Congress (05.07.2008 – 12.07.2008). – Seoul, 2008. – P. 6106–6113.
6. Diveev, A. I. The Network Operator Method for Search of the Most Suitable Mathematical Equation. Chapter in the book Bio-Inspired Computational Algorithms and Their Applications / A. I. Diveev, E. A. Sofronova ; ed. by Shangce Gao // Intech. Printed. – 2012. – February. – P. 19–42.
7. Дивеев, А. И. Синтез управления спуском космического аппарата на поверхность Луны методом сетевого оператора / А. И. Дивеев, К. А. Пупков, Е. А. Софронова // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Приборостроение». – 2013. – № 4. – С. 14–29.
8. Дивеев, А. И. Вариационный генетический алгоритм для решения задачи оптимального управления / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Современные проблемы науки и образования. – 2014. – № 1. – URL: http://www.science-education.ru/115-11474.
9. Дивеев, А. И. Синтез системы управления мобильным роботом методом интеллектуальной эволюции / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 3. – С. 52–59.
10. Дивеев, А. И. Численный метод вариационного генетического программирования для синтеза системы управления мобильного робота / А. И. Дивеев, С. И. Ибадулла // Труды Междунар. симп. Надежность и качество. – 2014. – Т. 1. – С. 30–35.
11. Дивеев, А. И. Метод вариационного аналитического программирования для решения проблемы синтеза системы управления / А. И. Дивеев, Н. Б. Конырбаев // Труды Междунар. симп. Надежность и качество. – 2014. – Т. 1. – С. 188–193.

Дивеев Асхат Ибрагимович
доктор технических наук,
начальник отдела безопасности
и нелинейного анализа,
Учреждение Российской академии наук,
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
(119333, Россия, г. Москва, Вавилова 40)
E-mail: aidiveev@mail.ru

Diveev Askhat Ibragimovich
doctor of technical sciences, head of department
of safety and nonlinear analysis,
Dorodnicyn Computer Center
of the Russian academy of sciences
(119333, 40 Vavilov street, Moscow, Russia)

Шмалько Елизавета Юрьевна
кандидат технических наук,
научный сотрудник,
отдел безопасности и нелинейного анализа,
Учреждение Российской академии наук,
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
(119333, Россия, г. Москва, Вавилова 40)
E-mail: asiedora@mail.ru

Shmal'ko Elizaveta Yur'evna
candidate of technical sciences,
scientific worker,
department of safety and nonlinear analysis,
Dorodnicyn Computer Center
of the Russian academy of sciences
(119333, 40 Vavilov street, Moscow, Russia)

Аннотация. Рассматривается задача синтеза системы управления. Для решения задачи используется вычислительный метод сетевого оператора. В работе рассмотрен подход решения задачи синтеза на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий. На первом этапе решаются численно задачи оптимального управления для различных начальных значений из заданной области. При решении задач оптимального управления используется вариационный генетический алгоритм. На втором этапе решается методом сетевого оператора задача

Abstract. The paper focuses on the problem of control system synthesis and a numerical method of the network operator is proposed to search a solution. The present paper describes an approach for control synthesis based on approximation of the set of optimal trajectories. Apart from a well-known approach when the stated control synthesis problem is solved directly by the method of network operator considering given criteria and terminal conditions, the present paper describes a two-stage synthesis. Firstly optimal controls are searched numerically for different initial conditions from some аппроксимации полученного на первом этапе множества оптимальных траекторий. Приведен пример двухэтапного синтеза системы управления спуском космического аппарата на поверхность Луны.

given set. The variational genetic algorithm is used to solve the problem of optimal control. The second stage makes an approximation of the previously received optimal trajectories by means of the network operator. An example illustrates the two-stage synthesis of a control system for a spaceship descent to the Moon.

Ключевые слова: синтез системы управления, оптимальное управление, генетический алгоритм, метод сетевого оператора, управление космическим аппаратом.

Key words: control system synthesis, optimal control, genetic algorithm, method of network operator, spaceship control.

УДК 62-50, 519-714

Дивеев, А. И.

Синтез системы управления на основе аппроксимации множества оптимальных траекторий методом сетевого оператора / А. И. Дивеев, Е. Ю. Шмалько // Надежность и качество сложных систем. – 2014. – № 4 (8). – С. 3–10.