УДК 519.2:8 DOI 10.21685/2307-4205-2020-2-5

С. Н. Кудрявцев

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ПО ЗНАЧЕНИЯМ НА НИХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

S. N. Kudryavtsev

RESTORATION OF VECTOR-VALUED FUNCTIONS BY VALUES AT THEIR LINEAR FUNCTIONALS

Аннотация. Для класса векторнозначных функций с фиксированной мажорантой модулей непрерывности старших производных в работе рассматривается задача восстановления функций из этого класса по значениям на них заданного числа линейных векторных функционалов путем комбинирования этих значений с помощью скалярных функций. Установлена слабая асимптотика поведения в зависимости от числа функционалов величины наилучшей точности восстановления в этой задаче. Настоящая статья продолжает исследования, проводившиеся автором в отношении классов вещественнозначных функций конечной гладкости, распространяя их на классы векторнозначных функций. Рассмотренный в работе способ восстановления векторнозначных функций является развитием понятия линейного n-поперечника применительно к ситуации, в которой осуществляется приближение векторнозначных функций. Полученные результаты могут быть использованы для построения алгоритмов, восстанавливающих многомерные объекты.

Ключевые слова: векторнозначные функции, конечная гладкость, восстановление функций, линейные функционалы.

Abstract. For a class of vector-valued functions with a fixed majorant of moduli of continuity of highest derivatives, the problem of restoring functions from this class from the values on them of a given number of linear vector functionals by combining these values using scalar functions is considered. A weak asymptotic behavior is established depending on the number of functionals of the value of the best restoration accuracy in this problem. This article continues the research carried out by the author regarding classes of real-valued functions of finite smoothness, extending them to classes of vector-valued functions. The method for reconstructing vector-valued functions considered in this work is a development of the concept of a linear n-difference in relation to a situation in which approximation of vector-valued functions is carried out. The results can be used to build algorithms that restore multidimensional objects.

Keywords: vector-valued functions, finite smoothness, restoration of functions, linear functionals.

Введение

Задачи восстановления функций стандартных классов в различных постановках занимают значительное место в теории приближений вещественнозначных функций. Наиболее близкой из них к теме настоящей статьи является задача описания асимптотики линейных n-поперечников классов вещественных функций конечной гладкости в пространствах с интегральной нормой. Ознакомиться с результатами, относящимися к этой проблематике, можно, обратившись к работам [1–4].

Изучение функций, принимающих значения в банаховых пространствах, например, случайных процессов, естественно, приводит к рассмотрению функциональных классов и постановке задач, аналогичных тем, которые имеются в теории вещественнозначных функций, возникает необходимость распространения существующих результатов, касающихся вещественнозначных функций, на случай векторнозначных функций.

Объектом изучения в настоящей работе является класс $F_p^{l,\omega}(I^d, X)$ функций, определенных на единичном кубе I^d, принимающих значения в сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве X, обобщенные частные производные до порядка l которых принадлежат $L_p(I^d, X)$, а модули непрерывности в $L_p(I^d, X)$ производных порядка l в совокупности не превосходят заданного модуля непрерывности ω. Вводится величина наилучшей точности восстановления в пространстве $L_q(I^d, X)$ функций из класса $F_p^{l,\omega}(I^d, X)$ по значениям на них n линейных векторных функционалов путем комбинирования этих значений с помощью скалярных функций. Последняя величина в каком-то смысле обобщает понятие линейного n-поперечника множеств в функциональных пространствах. Для указанной величины установлена слабая асимптотика поведения в зависимости от n.

Для вывода верхней оценки величины наилучшей точности восстановления по значениям n линейных функционалов использована схема, применявшаяся в работах [3] и [4] для оценки сверху линейного n-поперечника рассматриваемых там классов функций. Однако при $p < 2 < q$ эту схему удалось реализовать лишь в случае гильбертова пространства *X*, а не рефлексивного банахова пространства, как при других значениях p, q. Оценка снизу величины наилучшей точности восстановления по значениям n линейных функционалов для $F_p^{l,\omega}(I^d, X)$ сводится к нижней оценке линейного n-поперечника класса $F_p^{l,\omega}(I^d, \mathbb{R})$, которая взята из работы [4].

Предварительные сведения

Определим рассматриваемые ниже объекты и отметим некоторые их свойства (подробнее см. [5]).

Для банахова пространства X над $\mathbb{R}$, как обычно, через X^* будет обозначаться банахово пространство непрерывных линейных функционалов $x^* : X \mapsto \mathbb{R}$, с нормой

$$\|x^*\|_{X^*} = \sup_{x \in B(X)} |\langle x^*, x \rangle|,$$

где $B(X) = \{x \in X : \|x\|_X \le 1\}$.

Для банаховых пространств X, Y через $\mathcal{B}(X, Y)$ обозначим банахово пространство непрерывных линейных операторов $A : X \mapsto Y$ с нормой

$$\|A\|_{\mathcal{B}(X,Y)} = \sup_{x \in B(X)} \|Ax\|_Y .$$

Пусть $d \in \mathbb{N}, D$ – измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{R}^d$ и X – сепарабельное банахово пространство (над $\mathbb{R}$). Тогда функция $f : D \mapsto X$ будет называться измеримой (по Лебегу) на множестве D, если для любого $x^* \in X^*$ функция $\langle x^*, f(\cdot) \rangle$ является измеримой (по Лебегу) на D.

Ясно, что измеримые на множестве D функции со значениями в пространстве X образуют линейное пространство по операциям поточечного сложения и умножения на скаляры.

Рассмотрим доказательство леммы из работы [5].

Лемма 1. *Пусть $d \in \mathbb{N}, D$ – измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{R}^d, X$ – сепарабельное банахово пространство и $f : D \mapsto X$ – функция на D. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) если для любого $x^* \in X^*$ почти для всех $t \in D$ значение $\langle x^*, f(t) \rangle = 0$, то $f(t) = 0$ почти для всех $t \in D$;

2) если f – измеримая функция на D, то $\|f(\cdot)\|_X$ также является измеримой функцией на D.

Пусть множество D и пространство X удовлетворяют условиям леммы 1. Тогда определенные на множестве D функции f и g со значениями в пространстве X будем называть эквивалентными, если почти для всех $t \in D$ имеет место равенство $f(t) = g(t)$.

Понятно, что в условиях леммы 1 функции f и g эквивалентны тогда и только тогда, когда для любого $x^* \in X^*$ эквивалентны функции $\langle x^*, f(\cdot) \rangle$ и $\langle x^*, g(\cdot) \rangle$.

Будем говорить, что измеримая в области $D \subset \mathbb{R}^d$ функция $f : D \mapsto X$ слабо локально суммируема в D, если для любого $x^* \in X^*$ для любого компакта $G \subset D$ функция $\langle x^*, f(\cdot) \rangle$ суммируема на G.

Для $d \in \mathbb{N}$ обозначим через

$$\mathbb{Z}_+^d = \{\lambda \in \mathbb{Z}^d : \lambda_j \geq 0, j = 1, \ldots, d\},$$

при $l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{Z}_{+l}^d$ обозначим множество

$$\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : |\lambda| \leq l\}, \quad \text{где} \, |\lambda| = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j,$$

а через $\mathbb{Z}'^d_{+l}$ – множество

$$\{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d : |\lambda| = l\}.$$

При $d \in \mathbb{N}$ для области $D \subset \mathbb{R}^d$ через $C_0^\infty(D)$, как обычно, обозначается пространство всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, для каждой из которых ее носитель $supp\, \varphi \subset D$.

Пусть $d \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d, D$ – область в $\mathbb{R}^d, X$ – сепарабельное банахово пространство и $f : D \mapsto X$ – слабо локально суммируемая в D функция. Тогда будем говорить, что слабо локально суммируемая в D функция $g : D \mapsto X$ является обобщенной частной производной порядка λ функции f, и обозначать $g = D^\lambda f = \dfrac{D^{|\lambda|} f}{Dt_1^{\lambda_1} \ldots Dt_d^{\lambda_d}}$, если для любых $x^* \in X^*$ и $\varphi \in C_0^\infty(D)$ выполняется равенство

$$\int_D \varphi(t) \langle x^*, g(t) \rangle dt = (-1)^{|\lambda|} \int_D D^\lambda \varphi(t) \langle x^*, f(t) \rangle dt.$$

Определение обобщенной производной $D^\lambda f$ – корректно с учетом отождествления эквивалентных функций (см. п. 1 леммы 1).

Для множества D, пространства X, удовлетворяющих условиям леммы 1, и $p : 1 \leq p \leq \infty$, обозначим через $L_p(D, X)$ линейное пространство, состоящее из (отождествляемых между собой эквивалентных) измеримых функций $f : D \mapsto X$, для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D,X)} = \begin{cases} (\int_D \|f(t)\|_X^p \, dt)^{1/p}, & \text{при } p < \infty, \\ \sup vrai_{t \in D} \|f(t)\|_X, \text{при } p = \infty. \end{cases}$$

Посредством таких же рассуждений, как и в случае вещественных функций, устанавливается теорема.

Теорема 1. *При тех условиях на* D, X *и* p, *которые указаны в определении,* $L_p(D, X)$ *является полным нормированным пространством.*

Пусть $l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty, D$ – область в $\mathbb{R}^d$ и X – сепарабельное банахово пространство. Тогда обозначим через $W_p^l(D, X)$ линейное пространство всех функций $f \in L_p(D, X)$, для каждой из которых при $\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d$ в $L_p(D, X)$ существует обобщенная частная производная $D^\lambda f$, с нормой, определяемой равенством

$$\|f\|_{W_p^l(D,X)} = \sum_{j=0}^{l} \|f\|_{L_p^j(D,X)},$$

где

$$\|f\|_{L_p^j(D,X)} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}'^d_{+j}} \|D^\lambda f\|_{L_p(D,X)}.$$

Теорема 2. *Для* l, d, p, D, X *, удовлетворяющих условиям, приведенным в определении,* $W_p^l(D, X)$ *является полным нормированным пространством.*

Для $d \in \mathbb{N}$ в $\mathbb{R}^d$ фиксируем норму

$$\|t\| = \max_{\{j=1,\ldots,d\}} |t_j|, t \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть $l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, 1 \le p \le \infty, D$ – область в $\mathbb{R}^d, X$ – сепарабельное банахово пространство и ω – произвольный модуль непрерывности, т.е. $\omega : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ – непрерывная функция, обладающая следующими свойствами:

$$0 = \omega(0) \le \omega(\delta) \le \omega(\delta + \sigma) \le \omega(\delta) + \omega(\sigma), \delta, \sigma \in [0, \infty).$$

Обозначим через $F_p^{l,\omega}(D, X)$ множество всех функций $f \in W_p^l(D, X)$, для каждой из которых выполняется неравенство

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_{+l}^d} sup\ vrai_{h \in \mathbb{R}^d} (1 / \omega(\|h\|)) \left\| D^\lambda f(t+h) - D^\lambda f(t) \right\|_{L_p(D_h, X)} \le 1,$$

где $D_h = \{t \in D : t + uh \in D\ \forall u \in [0,1]\}$.

При $d \in \mathbb{N}$ положим $I^d = \{t \in \mathbb{R}^d : 0 < t_j < 1, j = 1, \ldots, d\}$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* X *– сепарабельное рефлексивное банахово пространство над* $\mathbb{R}$. *Пусть еще* $l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, 1 \le q \le p \le \infty$ *и* ω *– произвольный модуль непрерывности или* $l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, 1 \le p < q \le \infty$ *и модуль непрерывности* ω *таковы, что существует константа* $c_0(l, d, p, q, \omega) > 0$ *такая, что для* $\delta \in [0,1]$ *выполняется неравенство*

$$\int_0^1 t^{l - d/p + d/q - 1} \omega(\delta t) dt \le c_0 \omega(\delta).$$

Тогда справедливо соотношение

$$F_p^{l,\omega}(I^d, X) \subset L_q(I^d, X).$$

Основной результат

Теперь опишем точную постановку задачи и приведем полученный результат.

Сначала введем обозначения.

Как и выше, для банаховых пространств X, Y через $\mathcal{B}(Y, X)$ будем обозначать пространство непрерывных линейных операторов, действующих из Y в X, а через $\mathcal{B}^n(Y, X), n \in \mathbb{N}$, – произведение n экземпляров пространства $\mathcal{B}(Y, X)$.

Для множества D и банахова пространства X через $S(D, X)$ обозначим некоторое банахово пространство функций, определенных на множестве *D*, принимающих значения в *X*.

Через $\mathcal{H}(S(D, X))$ обозначим пространство всех функций $\varphi : D \mapsto \mathbb{R}$, для которых при любом $x \in X$ функция $\varphi(\cdot) \cdot x$ принадлежит $S(D, X)$, а через $\mathcal{H}^n(S(D, X))$ обозначим произведение n экземпляров пространства $\mathcal{H}(S(D, X))$.

Для множества $K \subset S(D, X)$ при $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\lambda_n(K, S(D, X)) = \inf_{\varphi \in \mathcal{H}^n(S(D,X)), \xi \in \mathcal{B}^n(S(D,X), X)} \sup_{f \in K} \left\| f(\cdot) - \sum_{i=1}^n \varphi_i(\cdot) \xi_i(f) \right\|_{S(D,X)}.$$

Установлена такая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $l \in \mathbb{Z}_+, d \in \mathbb{N}, X$ *– сепарабельное рефлексивное банахово пространство,* $1 \le p, q \le \infty$, ω *– модуль непрерывности и* $D = I^d$, $S(D, X) = L_q(I^d, X)$, $K = F_p^{l,\omega}(I^d, X)$ *(см. теорему 3). Тогда*

$$\lambda_n(K, S(D,X)) \asymp \begin{cases} n^{-l/d+(1/p-1/q)_+}\omega(n^{-1/d}), & \text{при } q \le p \text{ или } ((p < q \le 2 \text{ или } 2 \le p < q) \\ & \text{и соблюдении условия (1)),} \\ n^{-l/d+1/2-1/\breve{u}+(1/p+1/q-1)_+}\omega(n^{-1/d}), & \text{при } p < q < 2, l-d-(d/p-d/q) > 0 \\ & \text{для сеперабельного гильбертого} \\ & \text{пространства } X, \end{cases}$$

где $t_+ = (t + |t|)/2, t \in \mathbb{R}$.

Заключение

Полученные результаты, позволяют оценивать порядок точности восстановления векторнозначных функций из рассматриваемых классов по заданному числу значений на них линейных функционалов при восстановлении описанным выше способом.

Библиографический список

1. *Майоров, В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов / В. Е. Майоров // ДАН СССР. – 1978. – Т. 243, № 5. – С. 1127–1130.
2. *Höllig, K.* Approximationszahlen von Sobolev-Einbettungen / K. Höllig // Math. Ann. – 1979. – Vol. 242. – P. 273–281.
3. *Höllig, K.* Diameters of classes of smooth functions / K. Höllig // Quantitative approximation. – New York : Springer, 1980. – P. 163–176.
4. *Кудрявцев, С. Н.* Поперечники классов гладких функций / С. Н. Кудрявцев // Известия РАН. Математика. – 1995. – Т. 59, № 4. – С. 81–104.
5. *Кудрявцев, С. Н.* Восстановление векторнозначных функций конечной гладкости по их значениям в заданном числе точек / С. Н. Кудрявцев // Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. – Москва : ВЦ РАН, 2010. – С. 3–33.

References

1. Mayorov V. E. *DAN SSSR*. 1978, vol. 243, no. 5, pp. 1127–1130. [In Russian]
2. Höllig K. *Math. Ann*. 1979, vol. 242, pp. 273–281.
3. Höllig K. *Quantitative approximation*. New York: Springer, 1980, pp. 163–176.
4. Kudryavtsev S. N. *Izvestiya RAN. Matematika* [Izvestiya RAS. Mathematics]. 1995, vol. 59, no. 4, pp. 81–104. [In Russian]
5. Kudryavtsev S. N. *Teoreticheskie i prikladnye zadachi nelineynogo analiza* [Theoretical and applied problems of nonlinear analysis]. Moscow: VTs RAN, 2010, pp. 3–33. [In Russian]

Кудрявцев Сергей Николаевич
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
отдел управления робототехническими устройствами,
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук
(Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН)
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 40)
E-mail: kudrsn@yandex.ru

Kudryavtsev Sergey Nikolaevich
candidate of physical and mathematical sciences,
senior researcher,
department of control of robotic devices,
Federal Research Center «Computer science and control» of the Russian Academy of Sciences
(Dorodnitsyn computer center of the Russian Academy of Sciences)
(40 Vavilova street, Moscow, Russia)

Образец цитирования:

Кудрявцев, С. Н. Восстановление векторнозначных функций по значениям на них линейных функционалов / С. Н. Кудрявцев // Надежность и качество сложных систем. – 2020. – № 2 (30). – С. 32–36. – DOI 10.21685/2307-4205-2020-2-5.