УДК 629.039.58

РАСЧЕТ И ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОПАСНЫХ И БЕЗОПАСНЫХ СОСТОЯНИЙ ТЕХНОГЕННО-ОПАСНОГО ОБЪЕКТА[1]

Г. С. Садыхов, В. П. Савченко, И. А. Бабаев

Постановка вопроса

Рассмотрим невосстанавливаемый в процессе эксплуатации технический объект, отказ которого представляет техногенную опасность. Следовательно, вероятность безопасного состояния объекта в момент времени t, равная $P_{б}(t)$, удовлетворяет следующему соотношению:

$$P_{б}(t) = P(t)\,, \tag{1}$$

где $P(t)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Другими словами, безопасность невосстанавливаемого техногенно-опасного объекта определяется безотказностью, и, значит, ее расчет и оценки следует проводить методами теории надежности.

Рассмотрим теперь восстанавливаемый в процессе эксплуатации объект, отказ и восстановление которого представляют собой техногенную опасность.

Примем следующие допущения:

– будем считать, что восстановление начинается сразу после отказа;

– возможные состояния объекта в произвольный момент времени t – это опасное или безопасное состояния;

– законы распределения безотказных наработок и процесса восстановления – произвольные, т.е. непараметрические.

Тогда, обозначив вероятность опасного состояния объекта в момент времени t через $P_o(t)$, имеем

$$P_o(t) = 1 - P_{б}(t)\,. \tag{2}$$

Например, для невосстанавливаемого объекта с учетом формулы (1) получим

$$P_o(t) = F(t)\,,$$

где $F(t) = 1 - P(t)$ – вероятность отказа объекта в течение времени t.

В связи с расчетными формулами (1) и (2) возникает задача: найти или оценить вероятность безопасного состояния в момент времени t для восстанавливаемого техногенно-опасного объекта.

1. Формулы для вероятностей опасных и безопасных состояний

Докажем следующее утверждение:

Лемма. Для вероятности безопасного состояния объекта справедлива следующая формула:

$$P_{б}(t) = P(t)Q(t)\left\{1 + \int_0^t \frac{\mu(x)}{P(x)Q(x)}dx\right\}, \tag{3}$$

где $\mu(x)$ – интенсивность восстановления объекта в момент времени x,

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №07-08-00574-а и №10-08-00607-а).

$$Q(t)=\exp\left(-\int_0^t \mu(x)dx\right), \tag{4}$$

– вероятность того, что объект не будет восстановлен в течение времени t.

Доказательство. Согласно определению $\mu(t)$ – интенсивности восстановления объекта в момент времени t находим при $\Delta t\to 0$ [1]:

$$\Pr\big((t<\eta<t+\Delta t)\,|\,\eta>t\big)=\mu(t)\Delta t+o(\Delta t),$$

где $o(\Delta t)$ – бесконечно малая величина; левая часть – эта вероятность того, что время восстановления η будет находиться на временном интервале $(t, t+\Delta t)$ при условии, что исследуемый объект до момента времени t после отказа не был восстановлен. Следовательно, вероятность того, что объект будет в момент времени $t+\Delta t$ находиться в безопасном состоянии при условии, что он в момент времени t находился в опасном состоянии, согласно теореме умножения зависимых событий, равна при $\Delta t\to 0$

$$P_1=P_o(t)\big[\mu(t)\Delta t+o(\Delta t)\big]. \tag{5}$$

Точно также, согласно определению $\lambda(t)$ – интенсивности отказов объекта в момент времени t при $\Delta t\to 0$, имеем [2]:

$$\Pr\big((t<\zeta<t+\Delta t)\,|\,\zeta>t\big)=\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t),$$

где левая часть это вероятность того, что время отказа ζ будет находиться на временном интервале $(t, t+\Delta t)$ при условии, что в течение времени t рассматриваемый объект был безотказен. Откуда находим вероятность того, что объект в момент времени $t+\Delta t$ будет находиться в безопасном состоянии при условии, что в момент времени t он находился в этом же состоянии, равна согласно теореме умножения вероятностей следующему выражению:

$$P_2=P_б(t)\big[1-\lambda(t)\Delta t+o(\Delta t)\big], \tag{6}$$

где квадратная скобка равна согласно определению интенсивности отказов вероятности того, что на интервале времени $(t,t+\Delta t)$ не будет отказа при $\Delta t\to 0$.

Применяя теорему сложения вероятностей, определенных соотношениями (5) и (6), найдем

$$P_б(t+\Delta t)=P_о(t)\mu(t)\Delta t+P_б(t)\big(1-\lambda(t)\Delta t\big)+o(\Delta t),$$

откуда с учетом (2), получим

$$\frac{P_б(t+\Delta t)-P_б(t)}{\Delta t}=\mu(t)-\big(\lambda(t)+\mu(t)\big)P_б(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Перейдя к пределу при $\Delta t\to 0$, найдем следующее дифференциальное уравнение:

$$P_б'(t)+\big(\lambda(t)+\mu(t)\big)P_б(t)=\mu(t). \tag{7}$$

Решая это уравнение при естественном начальном условии

$$P_б(0)=1,$$

получим искомую формулу (3).

В частности, при $\mu(t)\equiv 0$ из формулы (3) с помощью (4) следует формула (1). Другими словами, если объект невосстанавливаемый, то вероятность его безопасного состояния в момент времени t совпадает с вероятностью его безотказной работы в течение времени t, что уже было отмечено выше.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующее утверждение.

Следствие 1. Для вероятности опасного состояния объекта справедлива следующая формула:

$$P_o(t) = P(t)Q(t)\int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)Q(x)}dx\,. \tag{8}$$

Доказательство. Используя формулу (3), согласно (2) имеем

$$P_o(t) = 1 - P(t)Q(t)\left\{1 + \int_0^t \frac{\mu(x)}{P(x)Q(x)}dx\right\}. \tag{9}$$

Так как интенсивность восстановления равна [1]

$$\mu(t) = \frac{-Q'(t)}{Q(t)},$$

то

$$\int_0^t \frac{\mu(x)}{P(x)Q(x)}dx = \int_0^t \frac{1}{P(x)}d\left(\frac{1}{Q(x)}\right),$$

откуда имеем

$$\int_0^t \frac{\mu(x)}{P(x)Q(x)}dx = \frac{1}{P(t)Q(t)} - 1 - \int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)Q(x)}dx\,,$$

где [3]

$$\lambda(x) = \frac{-P'(x)}{P(x)} \tag{10}$$

– интенсивность отказов.

Подставляя полученное выражение в соотношение (9), получим искомую формулу (8).

Следствие 2. Функция, определяемая формулой (8), является решением следующего дифференциального уравнения:

$$P_o'(t) + \big(\lambda(t) + \mu(t)\big)P_o(t) = \lambda(t) \tag{11}$$

при начальном условии

$$P_o(0) = 0.$$

Следствие 3. Если $\lambda(t) \equiv 0$, то

$$P_o(t) \equiv 0\,.$$

Другими словами, «абсолютное» отсутствие отказов влечет за собой «идеальную» безопасность, так как согласно (2)

$$P_{б}(t) \equiv 1\,.$$

2. Непараметрические оценки вероятностей опасных и безопасных состояний

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Для вероятности опасного состояния объекта имеет место следующая оценка:

$$P_o(t) \le 1 - P(t)\,, \tag{12}$$

где $P(t)$ – вероятность безотказной работы объекта в течение времени t.

Доказательство. Так как

$$\frac{Q(t)}{Q(x)} \le 1,$$

где $0 < x < t$, то из формулы (8) имеем

$$P_o(t) \le P(t)\int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)}dx .$$

Учитывая формулу (10), имеем

$$P_o(t) \le P(t)\int_0^t \frac{-P'(x)}{P^2(x)}dx .$$

Откуда, интегрируя правую часть, получим искомую оценку (12).

Следствие. Для вероятности безопасного состояния объекта справедлива следующая оценка:

$$P_б(t) \ge P(t) . \tag{13}$$

В частности, из оценок (12) и (13) получим следующие важные для практических приложений оценки:

$$P_о(t_\gamma) \le 1-\gamma ,$$

$$P_б(t_\gamma) \ge \gamma ,$$

где $t_\gamma = \sup\{t \mid P(t) \ge \gamma\}$ – гамма-процентный ресурс объекта при заданном уровне γ, $(0<\gamma<1)$ [4].

Заметим, что доказанные оценки этого раздела справедливы для любого закона распределения ресурса.

3. Оценки вероятностей опасных и безопасных состояний стареющих объектов

Будем говорить, что объект стареющий, если его интенсивность отказов (10) как функция времени монотонно растет.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 2. Для вероятностей опасного и безопасного состояний стареющего объекта справедливы следующие оценки:

$$P_о(t) \le \frac{t}{r};\ P_б(t) \ge 1-\frac{t}{r}, \tag{14}$$

где r – средний ресурс, здесь

$$t < r. \tag{15}$$

Доказательство. Из формулы (8) с учетом того, что при $t > x$

$$\frac{P(t)}{P(x)} \le 1;\ \frac{Q(t)}{Q(x)} \le 1,$$

имеем

$$P_о(t) \le \int_0^t \lambda(x)dx . \tag{16}$$

Так как

$$\int_0^t \lambda(x)dx = -\ln P(t),$$

то, используя следующую оценку для стареющих объектов [3]:

$$P(t) \ge e^{-\frac{t}{r}},\ (t < r),$$

получим

$$\int_0^t \lambda(x) \le \frac{t}{r}.$$

Учитывая это в соотношении (16), найдем оценки (14).

4. Оценки вероятностей опасных и безопасных состояний интенсивно восстанавливаемых стареющих объектов

Будем считать, что объект интенсивно восстанавливается, если его интенсивность восстановления $\mu(t)$ как функция времени t монотонно растет.

Для таких объектов можно избавиться от ограничения (15), доказав следующее утверждение.

Теорема 3. Для вероятностей опасного и безопасного состояний интенсивно восстанавливаемых стареющих объектов справедливы следующие оценки:

$$P_{\text{о}}(t) \le t\lambda(t)\frac{1-P(t)Q(t)}{-\ln\left(P(t)Q(t)\right)}; \tag{17}$$

$$P_{\text{б}}(t) \ge 1 - t\lambda(t)\frac{1-P(t)Q(t)}{-\ln\left(P(t)Q(t)\right)}. \tag{18}$$

Доказательство. Для интенсивно восстанавливаемых стареющих объектов справедливы следующие оценки при $x < t$ [5]:

$$P(x) \ge P(t)^{\frac{x}{t}};\ Q(x) \ge Q(t)^{\frac{x}{t}}.$$

Учитывая эти оценки и то, что при $x < t$

$$\lambda(x) \le \lambda(t),$$

из формулы (8), получим

$$P_o(t) \le P(t)Q(t)\lambda(t)\int_0^t \left(P(t)Q(t)\right)^{-\frac{x}{t}} dx. \tag{19}$$

Так как

$$\int_0^t \left(P(t)Q(t)\right)^{-\frac{x}{t}} dx = t\frac{\left(P(t)Q(t)\right)^{-1}-1}{-\ln\left(P(t)Q(t)\right)},$$

то из (19) найдем искомые оценки (17) и (18).

Теперь покажем, что оценки (17) и (18) достижимы, т.е. существует такой закон распределения безотказных наработок и такой закон времени восстановления, для которых правые и левые части оценок (17) и (18) равны.

Для этой цели положим вероятность безотказной работы объекта, равной

$$P(t) = \exp(-\lambda t), \tag{20}$$

а вероятность восстановления, равной

$$Q(t) = \exp(-\mu t), \tag{21}$$

где $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ – постоянные интенсивности отказов и восстановления соответственно. Тогда согласно оценке (18) имеем

$$P_б(t) \geq 1 - t\lambda \frac{1 - e^{-(\lambda+\mu)t}}{(\lambda+\mu)t},$$

откуда получим

$$P_б(t) \geq \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{22}$$

Рассчитаем левую часть (22), используя формулу (3) и условия (20) и (21). Имеем

$$P_б(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} \left[1 + \mu \int_0^t e^{(\lambda+\mu)x} dx \right].$$

После несложных выкладок получим:

$$P_б(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}, \tag{23}$$

откуда видно, что правые части (22) и (23) равны. Следовательно, оценка (18) достижима.

Точно также доказывается достижимость оценки (17).

5. Предельные оценки вероятностей безопасного и опасного состояний

Докажем следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть интенсивности отказов и восстановления имеют следующие пределы:

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \Lambda; \ \lim_{t\to\infty} \mu(t) = M. \tag{24}$$

Тогда справедливы следующие предельные стационарные значения оценок вероятностей безопасного и опасного состояний стареющего объекта:

$$\lim_{t\to\infty} P_б(t) = K_г; \tag{25}$$

$$\lim_{t\to\infty} P_о(t) = K_п, \tag{26}$$

где

$$K_г = \frac{M}{\Lambda + M}; \ K_п = \frac{\Lambda}{\Lambda + M},$$

соответственно коэффициенты готовности и простоя объекта.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся формулой (8) и покажем, что правая часть ее есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$ при $t \to \infty$.

Так как $Q(x) \leq 1$, то

$$\int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)Q(x)} dx \geq \int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)} dx.$$

Используя формулу (10), получим

$$\int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)Q(x)} dx \geq \int_0^t d\left(\frac{1}{P(x)}\right),$$

откуда имеем

$$\int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)Q(x)}dx \geq \frac{1}{P(t)} - 1.$$

Видно, что при $t \to \infty$

$$\int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(x)Q(x)}dx \to \infty .$$

Следовательно, правая часть (8) есть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталя, имеем

$$\lim_{t\to\infty} P_{\text{o}}(t) = \frac{\lim\limits_{t\to\infty}\left(\int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(t)Q(t)}dx\right)'}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{P(t)Q(t)}\right)'}.$$

Так как правая часть равна

$$\frac{\lim\limits_{t\to\infty}\left(\int_0^t \frac{\lambda(x)}{P(t)Q(t)}dx\right)'}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{1}{P(t)Q(t)}\right)'} = \frac{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\lambda(t)}{P(t)Q(t)}}{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-P'(t)Q(t)-P(t)Q'(t)}{\left(P(t)Q(t)\right)^2}},$$

то, используя формулу (10) и формулу

$$\mu(t) = \frac{-Q'(t)}{Q(t)},$$

получим

$$\lim_{t\to\infty} P_{\text{o}}(t) = \frac{\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(t)}{\lim\limits_{t\to\infty}\lambda(t) + \lim\limits_{t\to\infty}\mu(t)}.$$

Отсюда с учетом формулы (24) найдем искомый предел (25).

Для доказательства предела (26) воспользуемся формулами (2) и (25). Тогда

$$\lim_{t\to\infty} P_{\text{o}}(t) = 1 - \frac{\Lambda}{\Lambda + \mathrm{M}},$$

что и доказывает (26).

Заключение

В предложенной статье доказаны формулы для расчета вероятностей безопасного и опасного состояний восстанавливаемого объекта через вероятности безотказной работы и восстановления.

Для вероятностей безопасного и опасного состояний стареющих и интенсивно восстанавливаемых объектов установлены соответственно нижние и верхние гарантированные непараметрические оценки.

Для оценок вероятностей безопасного и опасного состояний стареющего объекта, отказ и восстановления которого представляют техногенную опасность, доказаны предельные стационарные значения, равные соответственно коэффициенту готовности и коэффициенту простоя объекта в процессе эксплуатации.

Отметим также, что настоящая статья является продолжением работ, опубликованных в отечественных и зарубежных изданиях, в том числе и в изданиях NASA [6–17].

Список литературы

1. Кокс, Д. Р. Теория восстановления / Д. Р. Кокс, В. Л. Смит. – М. : Советское радио, 1967. – 299 с.
2. Барлоу, Р. Математическая теория надежности / Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М. : Сов. радио, 1969. – 488 с.
3. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
4. ГОСТ Р 27.002-2009. Надежность в технике. Термины и определения. – М. : Стандартинформ, 2011. – 32 с.
5. Садыхов, Г. С. Методы и модели оценок безопасности сверхназначенных сроков эксплуатации технических объектов / Г. С. Садыхов, В. И. Кузнецов. – М. : ЛКИ, 2007. – 144 с.
6. Садыхов, Г. С. Критерии оценок безопасной эксплуатации объектов / Г. С. Садыхов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 1. – С. 119–122.
7. A Nonparametric Method for Estimation of the Lower Confidence Limit of the Mean Residual Life of Equipment Items / G. S. Sadykhov, V. P. Savchenko, H. R. Fedorchuk, Ju. V. Gulyayev // The Smithsonian / NASA Astrophysics Data System, Physics-Doklady. – 1995. – V. 40, Issue 7. – July. – P. 343–345.
8. Sadykhov, G. S. Dependence of the Operating-Life Index on the Characteristics of Life-Reserve Spending / G. S. Sadykhov, V. P. Savchenko // The Smithsonian / NASA Astrophysics Data System, Physics-Doklady. – 1998. – V. 43, Issue 7. – July. – P. 412–414.
9. Садыхов, Г. С. Оценка условного распределения отказов в пуассоновском потоке через биномиальный закон / Г. С. Садыхов, И. А. Бабаев // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. – 2013. – № 8. – С. 143–150.
10. Садыхов, Г. С. Оценка длительности безопасной эксплуатации и допустимого числа срабатываний свыше назначенных уровней для стареющих техногенно-опасных объектов / Г. С. Садыхов, Самер Алшехаби // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2008. – № 3. – С. 120–126.
11. Садыхов, Г. С. Непараметрические и предельные оценки длительности безопасного срока эксплуатации техногенно-опасных объектов / Г. С. Садыхов, О. В. Некрасова // Труды института системного анализа РАН. – 2010. – Т. 53. – С. 191–198.
12. Садыхов, Г. С. Расчет показателей безопасности эксплуатации подсистемы с параллельно нагруженными элементами в составе техногенно-опасного объекта / Г. С. Садыхов, О. В. Некрасова // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2011. – № 1. – С. 107–113.
13. Sadykhov, G. S. Estimation of the Residual Life for Items of Equipment, Based on a Physical Model of Addictive Accumulation of Damages / G. S. Sadykhov, V. P. Savchenko, Ju. V. Gulyayev // The Smithsonian / NASA Astrophysics Data System, Physics-Doklady. – 1995. – V. 40, Issue 8. – August. – P. 397–400.
14. Садыхов, Г. С. Расчет показателей контроля технического состояния техногенно-опасного объекта / Г. С. Садыхов // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – № 4. – С. 120–126.
15. Sadykhov, G. S. Technical condition control calculation for hazardous industrial facilities / G. S. Sadykhov // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – V. 43, Issue 4. – July. – P. 327–332.
16. Садыхов, Г. С. К проблеме оценки средней наработки до критического отказа техногенно-опасного объекта / Г. С. Садыхов, В. П. Савченко // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 1. – С. 59–61.
17. Информационная технология многофакторного обеспечения надежности сложных электронных систем / Н. К. Юрков, А. В. Затылкин, С. Н. Полесский, И. А. Иванов, А. В. Лысенко // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 4. – С. 74–79.

Садыхов Гулам Садыхович
доктор технических наук, профессор,
главный научный сотрудник,
действительный член
Академии проблем качества РФ,
Московский государственный
технический университет им. Н. Э. Баумана
(105005, Россия, г. Москва,
2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1)
E-mail: gsadykhov@gmail.com

Sadykhov Gulam Sadykhovich
doctor of technical science, professor,
senior researcher manager,
fellow of Russian Federation Quality Problems academy
Moscow State Technical University
named after N. E. Bauman
(105005, 2-ya Baumanskaya street, apartment 5, page 1,
Moscow, Russia)

Савченко Владимир Петрович
доктор технических наук, профессор,
генеральный директор,
Радиотехнический институт
им. академика Л. А. Минца
(127083, Россия, г. Москва, ул. 8 Марта, д. 10, стр. 1)
E-mail: savchenko@rti-mints.ru

Бабаев Ислам Акмурадович
инженер,
ОАО «Радиофизика»
(125480, Россия, г. Москва,
ул. Героев Панфиловцев, д. 10)
E-mail: sleavik@gmail.com

Аннотация. Устанавливаются непараметрические гарантированные оценки для вероятностей опасного и безопасного состояния объектов, отказ и восстановление которых в процессе эксплуатации представляют техногенную опасность. Также в статье доказаны оценки вероятностей опасного и безопасного состояния в случае стареющих восстанавливаемых объектов и приведены предельные стационарные значения оценок этих вероятностей.

Ключевые слова: непараметрическая оценка, опасное состояние, безопасное состояние, стареющий объект, восстанавливаемый объект.

Savchenko Vladimir Petrovich
doctor of technical science, professor,
general manager,
Radiotechnical Institute
named after academician A. L. Mints
(127083, p.1, 10 8 March street, Moscow, Russia)

Babaev Islam Akmuradovich
engineer,
Joint Stock Company «Radiofizika»
(125480, 10 Geroev Panfilovtsev street, Moscow Russia)

Abstract. In this paper we consider nonparametric guaranteed estimates of safe and unsafe states probabilities for objects which failure and recovery during their operation are technogenically hazardous. This paper also reviews estimates of safe and unsafe states probabilities and their limit stationary values for aging restorable units.

Key words: nonparametric estimate, safe state, unsafe state, aging unit, restorable unit.

УДК 629.039.58
Садыхов, Г. С.
Расчет и оценка вероятностей опасных и безопасных состояний техногенно-опасного объекта / Г. С. Садыхов, В. П. Савченко, И. А. Бабаев // Надежность и качество сложных систем. – 2014. – № 4 (8). – С. 69–77.