УДК 519.71 DOI 10.21685/2307-4205-2020-4-8

В. А. Березнев

СИСТЕМА БЕЗАВАРИЙНОГО УПРАВЛЕНИЯ ГРУППОЙ РОБОТОВ

V. A. Bereznev

SYSTEM FOR TROUBLE-FREE CONTROL OF A ROBOTS GROUP

Аннотация. Рассматривается задача одновременного управления группой роботов. Для каждого робота заданы начальная и конечная точки пути. Особенность заключается в том, что прямолинейное движение роботов из начальной точки в конечную невозможно из-за наличия препятствий. Предполагается, что препятствия имеют круговую форму. Наличие препятствий делает весьма проблематичным использование классических методов синтеза оптимального управления или математического программирования в силу невыпуклости области допустимых траекторий роботов. В основе предлагаемого подхода лежит разделение искомых траекторий роботов на отдельные участки, на каждом из которых нет препятствий. Поиск различных вариантов таких траекторий базируется на теории графов, а движение на каждом из участков без препятствий сводится к задаче синтеза оптимального быстродействия с фазовыми ограничениями. Кроме того, предлагается алгоритм, исключающий возможность столкновения роботов во время движения.

Ключевые слова: задача оптимального управления, теория графов, задача о кратчайшем пути, управление роботом.

Abstract. The problem of simultaneous control of robots group is considered. For each of robots the start and end points of the path are set. Feature the problem is that it is impossible to move robots in a straight line from the starting point to the end point due to the presence of obstacles. It is assumed that obstacles have a circular shape. The presence of obstacles makes it very problematic the use of classical methods of optimal control synthesis or mathematical programming due to non-convexity region of admissible trajectories of the robots. The proposed approach is based on is the segregation of the desired trajectories of robots in certain areas each of which has no obstacles. Search for different options such as the trajectory is based on graph theory, and the movement on each of the sections without obstacles it is reduced to the problem of optimal control synthesizing with phase restrictions. In addition, an algorithm, eliminates the possibility of robots colliding while driving is proposed.

Keywords: optimal control problem, graph theory, the problem of the shortest path, control of the robot.

Рассмотрим задачу управления группой из K роботов, для каждого из которых заданы начальная точка траектории x_{k0} и конечная точка x_k^*, $k \in \overline{1,K}$, где k – индекс робота. Предполагается также, что роботы начинают движение одновременно. Пусть на плоскости заданы круговые препятствия так, что траектории движения роботов, которыми предстоит управлять, не должны иметь общих точек с этими кругами. Круговые препятствия заданы координатами своих центров $C_j\left(x_{1,j}, x_{2,j}\right)$ и длинами радиусов r_j, $j \in \overline{1,J}$. Целью управления является минимизация времени, затрачиваемого каждым роботом на перемещение из точки x_{k0} в точку x_k^* (рис. 1).

Традиционным подходом к решению этой задачи является использование методов оптимального управления, основанных на принципе максимума Л. С. Понтрягина (см., например, работы [1, 2], а также [3–5]). В этом случае поведение роботов описывается дифференциальными уравнениями второго порядка

$$\ddot{x}_k = f\left(x_k, \dot{x}_k, u_k\right),\ k \in \overline{1,K}, \tag{1}$$

где $u_k = u_k(t)$ – действительный управляющий параметр, подчиненный условию

$$u^- \le u_k(t) \le u^+, \tag{2}$$

а $x_k(t)\in\mathbb{R}_2$. Условие непересечения траекторий роботов $x_k(t)$ с круговыми областями препятствий означает, что для любого t должны выполняться неравенства

$$\left\|x_k(t)-C_j\right\|>r_j,\ k\in\overline{1,K},\ j\in\overline{1,J}. \tag{3}$$

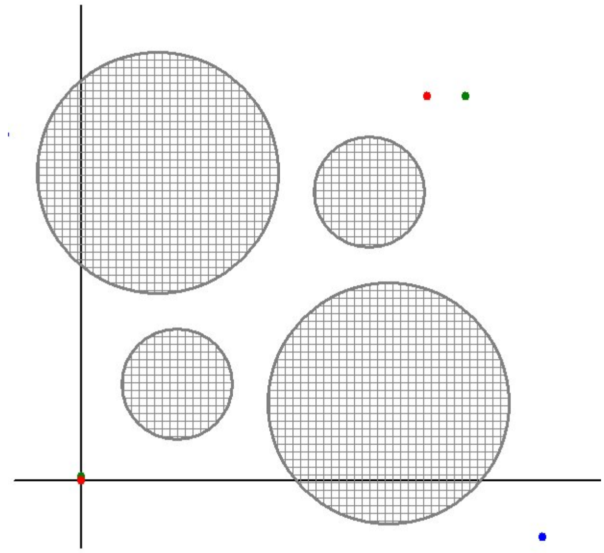

Рис. 1. Круговые препятствия

Эти условия означают невыпуклость области допустимых траекторий роботов, в силу чего использование методов оптимального управления, как и методов математического программирования (см., например, [6–9]) становится весьма проблематичным. Известны и некоторые эвристические подходы ([10, 11]).

Предлагаемые результаты основаны на известной теории синтеза оптимальных управлений в нелинейных системах второго порядка (см., например, [2]), а также на методе построения кратчайшего пути на связном ориентированном плоском графе [12]. В частности, предлагаемый подход является некоторой модификацией предложенного в работе [13] метода и заключается в следующем.

Окружности, являющиеся границами круговых препятствий, снабжаются некоторыми точками, объявляемыми вершинами ν_i, $i\in\overline{1,n}$ связного ориентированного графа $\Gamma(S,V)$, где $V=\{\nu_i\}$ – множество вершин графа, а $S=\{s_{ij}\}$ – множество ребер $i,j\in\overline{1,n}$. Длина ребра $s_{ij}\in S$ определяется временем прохождения робота от вершины ν_i к вершине ν_j, причем в качестве времени берется решение задачи оптимального быстродействия.

В фазовых координатах $x^1=x$ и $x^2=\dot{x}$ уравнение (1) для каждого $k\in\overline{1,K}$ записывается в виде нормальной системы (индекс робота временно опускаем)

$$\dot{x}_1=x_2,$$

$$\dot{x}_2=f\left(x^1,x^2,u\right). \tag{4}$$

Мы ограничимся рассмотрением линейного случая, когда $\ddot{x}=u$. При этом предполагается, что на отрезке $\left[\nu_i,\nu_j\right]$, где рассматривается задача синтеза оптимального управления, нет препятствий. В противном случае мы считаем, что длина ребра графа $s_{ij}=+\infty$. Кроме того, будем предполагать, что в точке ν_i объект начинает движение с линейной скоростью, а в конечную точку ν_j должен прибыть со скоростью $x^2=q_j\geq 0$. В этих условиях, как это следует из работы [2], управляемый объект относится к классу неосциллирующих, принцип максимума оказывается не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности, и, кроме того, справедлива следующая лемма [2, с. 282].

Лемма 1 *Каждое оптимальное по быстродействию управление, осуществляющее переход из любой начальной точки в любую конечную точку, принимает только значения* $u(t)=u^-$ *либо* $u(t)=u^+$ *и имеет не более одного переключения.*

В связи с леммой 1 уместно сделать одно важное замечание. Утверждение леммы о числе переключений управления сделано при отсутствии какого-либо ограничения сверху на $\dot{x}^1$. Вместе с тем очевидно, что если имеет место ограничение $\dot{x}^1 \le \hat{q}$, то в зависимости от значения u^+ и длины пути s_{ij} возможны одно или два переключения со значениями управления u^+, 0, u^-.

Обратимся к вопросу о назначении вешин графа. Естественным требованием при построении траектории движения робота является ее гладкость (дифференцируемость) на всем протяжении. Это означает, что обход роботом кругового препятствия должен начинаться и заканчиваться в точках касания к окружностям, являющимся границами препятствий (рис. 2). В число вершин (помимо точек касания) естественно включить заданные начальную $\nu_{k0}=x_{k0}$ и конечную $\nu_{kn}=x_k^*$ точки траектории, где $k=\overline{1,K}$.

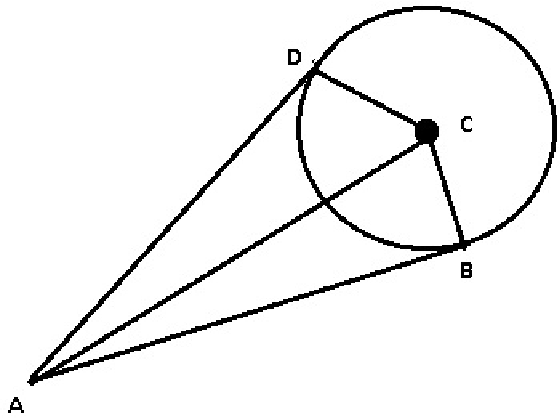

Рис. 2. Определение вершин графа

Пусть $A(x_{01},x_{02})$ – произвольная точка плоскости, а $C(x_{j1},x_{j2})$ – заданная точка, являющаяся центром *j*-го кругового препятствия. Тогда очевидно, что координаты точек B и D являются решениями нелинейной системы уравнений

$$(x_{01}-x_1)(x_{j1}-x_1)+(x_{02}-x_2)(x_{j2}-x_2)=0,$$

$$(x_1-x_{j1})^2+(x_2-x_{j2})^2=r_j^2, \tag{5}$$

где r_j – радиус j-го кругового препятствия.

С помощью несложных преобразований легко установить, что решениями системы (5) являютя точки (x_1,x_2), где в случае, когда $x_{02}\neq x_{j2}$, компонента x_1 является решением квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ при

$$a=(x_{01}-x_{j1})^2+(x_{02}-x_{j2})^2,$$

$$b=-2x_{j1}(x_{02}-x_{j2})^2-2\omega(x_{01}-x_{j1})+2x_{j2}(x_{01}-x_{j1})(x_{02}-x_{j2}),$$

$$c = \omega^2 - \tau\left(x_{02} - x_{j2}\right)^2 - 2x_{j2}\omega\left(x_{02} - x_{j2}\right),$$

$$\tau = r_j^2 - x_{j1}^2 - x_{j2}^2,$$

$$\omega = \tau + x_{01}x_{j1} + x_{02}x_{j2}.$$

Наконец, если $x_{02} = x_{j2}$, то x_1 вычисляется по формуле $x_1 = \dfrac{\omega}{x_{01} - x_{j1}}$, а значение компоненты x_2 получаем из второго уравнения системы (5).

Теперь рассмотрим построение касательных к двум кругам (рис. 3).

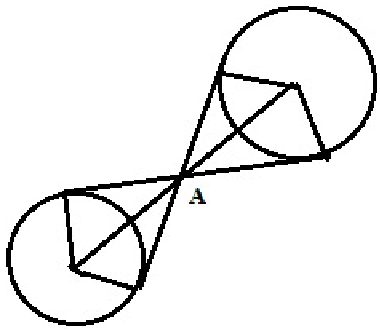

Рис. 3. Касательные к препятствиям

Очевидно, что из подобия следует, что точка *A* является единственной точкой пересечения касательных и прямой, соединяющей центры кругов. Следовательно, можно вычислить координаты точки *A*, после чего задача сводится к рассмотренной выше.

Таким образом, любая траектория любого робота представляет собой последовательность участков, часть которых является прямолинейными участками между двумя вершинами графа без препятствий, а другая – участками движения с постоянной скоростью по дуге окружности. Для любого робота такие траектории образуют некоторое конечное множество, из которого может быть сделан выбор с целью минимизации времени движения. С этой целью воспользуемся алгоритмом Дейкстры [12] построения кратчайшего пути на графе.

Наконец, обратимся к проблеме безаварийности управления роботами. Оптимальные с точки зрения быстродействия маршруты роботов могут получиться таковыми, что некоторые из них окажутся в некоторой малой окрестности одной и тойже точки в тот или иной момент времени, т.е. $\left\|x_k(t) - x_p(t)\right\| \le \varepsilon$ для некоторого t и некоторого заданного малого значения $\varepsilon > 0$. Это означает, что в модель управления необходимо включить условия

$$\left\|x_k(t) - x_p(t)\right\| > \varepsilon \qquad (6)$$

для любого t и любых k и p.

Предположим, что в некоторый момент $\tau > 0$ условие (6) нарушается (рис. 4) для *k*-го и *p*-го роботов, причем *k*-й робот преодолевает первый прямолинейный участок трассы с двумя переключениями (случай одного переключения исследуется аналогично). Следовательно, робот достигает скорости $\tilde{q}$ за время $t_0 = \dfrac{\tilde{q}}{u^+}$. Если предположить, что робот начинает движение с ускорением $\tilde{u} < u^+$, то он достигнет скорости за время $t_1 = \dfrac{\tilde{q}}{\tilde{u}}$. Пусть начиная с этого момента времени робот сохраняет все пераметры своей траектории. Тогда к моменту t_1 разница в пройденном расстоянии составит

$$\Delta S = \frac{u^+ t_0^2}{2} + \tilde{q}\left(t_1 - t_0\right) - \frac{\tilde{u}t_1^2}{2},$$

следовательно, на эту же величину увеличится расстояние между роботами в момент τ. Таким образом, по условию безаварийности требуется, чтобы $\Delta S \geq \varepsilon$. Отсюда после несложных преобразований получаем, что условие (6) будет выполнено, если для $t \in [0, t_1]$ и только на этом участке траектории робота в качестве управления взять $\tilde{u} = \dfrac{2\varepsilon u^{+} + \tilde{q}^{2}}{u^{+}\tilde{q}^{2}}$.

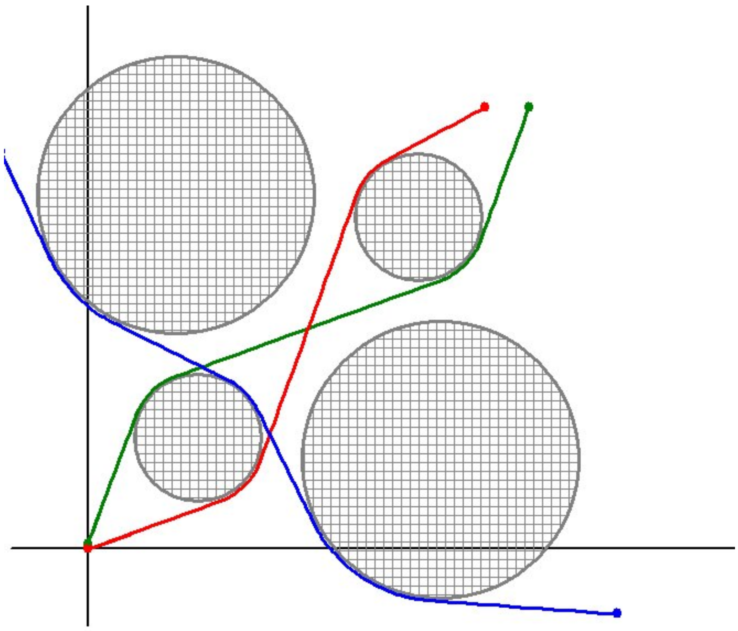

Рис. 4. Оптимальные траектории роботов

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-29-03061-мк).

Библиографический список

1. *Понтрягин, Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – Москва : Наука, 1983. – 393 с.
2. *Болтянский, В. Г.* Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. – Москва : Наука, 1968. – 408 с.
3. *Арутюнов, А. В.* Необходимые условия оптимальности второго порядка в задачах оптимального импульсного управления / А. В. Арутюнов, Д. Ю. Карамзин, Ф. Л. Перейра, Н. Ю. Черникова // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 8. – С. 1100–1118.
4. *Карамзин, Д. Ю.* Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями при ослабленных предположениях управляемости / Д. Ю. Карамзин // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2018. – № 20. – С. 46–61.
5. *Karamzin, D. Yu.* A generalized Filippov-like theorem for optimal control problems with constraints / D. Yu. Karamzin, V. A. de Oliveira, F. L. Pereira, G. N. Silva // Intelligent Systems 2018 : Proceedings of the 13-th International Symposium. – 2018. – P. 478–487.
6. *Карманов, В. Г.* Математическое программирование / В. Г. Карманов. – Москва : Наука, 2000. – 264 с.
7. *Измаилов, А. Ф.* Численные методы оптимизации / А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. – Москва : Наука, 2003.
8. *Дарьина, А. Н.* О решении дифференциальных вариационных неравенств методами ньютоновского типа / А. Н. Дарьина // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2018. – № 20. – С. 159–166.
9. *Daryina, A. N.* A class of active-set newton methods for mixed complemetarity problems / A. N. Daryina, A. F. Izmailov, M. V. Solodov // SIAM J. Optimization. – 2004. – Vol. 15. – P. 109–120.
10. *Прокопьев, И. В.* Функция определения движения мобильного робота / И. В. Прокопьев // Вопросы теории безопасности и устойчивости систем. – 2018. – № 20. – С. 18–27.
11. *Betskov, A. V.* Problem of cost fuction synthesis for mobile robot's trajectory and the network operator method for its solution / A. V. Betskov, I. V. Prokopyev, A. E. Ilinbaev // Intelligent Systems 2018 : proceedings of the 13-th International Symposium. – 2018. – P. 695–701.

12. *Dijkstra, E. W.* A note on two problems in connection with graphs / E. W. Dijkstra // Numer. Math. Springer Science + Business media. – 1959. – Vol. 1, № 1. – P. 269–271.
13. *Березнев, В. А.* Метод редукции пространства состояний для решения задачи оптимального управления / В. А. Березнев, А. И. Дивеев // Надежность и качество сложных систем. – 2019. – № 3 (27). – С. 17–25.

References

1. Pontryagin L. S., Boltyanskiy V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical theory of optimal processes]. Moscow: Nauka, 1983, 393 p. [In Russian]
2. Boltyanskiy V. G. *Matematicheskie metody optimal'nogo upravleniya* [Mathematical methods of optimal control]. Moscows: Nauka, 1968, 408 p. [In Russian]
3. Arutyunov A. V., Karamzin D. Yu., Pereyra F. L., Chernikova N. Yu. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 2018, vol. 54, no. 8, pp. 1100–1118. [In Russian]
4. Karamzin D. Yu. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoychivosti system* [Questions of the theory of security and stability of systems]. 2018, no. 20, pp. 46–61. [In Russian]
5. Karamzin D. Yu., de Oliveira V. A., Pereira F. L., Silva G. N. *Intelligent Systems 2018: Proceedings of the 13-th International Symposium*. 2018, pp. 478–487.
6. Karmanov V. G. *Matematicheskoe programmirovanie* [Mathematical programming]. Moscow: Nauka, 2000, 264 p. [In Russian]
7. Izmailov A. F., Solodov M. V. *Chislennye metody optimizatsii* [Numerical optimization methods]. Moscow: Nauka, 2003. [In Russian]
8. Dar'ina A. N. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoychivosti system* [Questions of the theory of security and stability of systems]. 2018, no. 20, pp. 159–166. [In Russian]
9. Daryina A. N., Izmailov A. F., Solodov M. V. *SIAM J. Optimization*. 2004, vol. 15, pp. 109–120.
10. Prokop'ev I. V. *Voprosy teorii bezopasnosti i ustoychivosti system* [Questions of the theory of security and stability of systems]. 2018, no. 20, pp. 18–27. [In Russian]
11. Betskov A. V., Prokopyev I. V., Ilinbaev A. E. *Intelligent Systems 2018: proceedings of the 13-th International Symposium*. 2018, pp. 695–701.
12. Dijkstra E. W. *Numer. Math. Springer Science + Business media*. 1959, vol. 1, no. 1, pp. 269–271.
13. Bereznev V. A., Diveev A. I. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnykh system* [Reliability and quality of complex systems]. 2019, no. 3 (27), pp. 17–25. [In Russian]

Березнев Валентин Александрович
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник,
Управление робототехническими устройствами,
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление»
Российской академии наук
(Россия, г. Москва, ул. Вавилова, 40)
E-mail: va_bereznev@mail.ru

Bereznev Valentin Alexandrovich
doctor of physical and mathematical sciences,
senjor reseacher,
Robot control center,
Federal reseach center
"Computer Science and Management"
of the Russian Academy of Sciences
(40 Vavilov street, Moscow, Russia)

Образец цитирования:

Березнев, В. А. Система безаварийного управления группой роботов / В. А. Березнев // Надежность и качество сложных систем. – 2020. – № 4 (32). – С. 73–78. – DOI 10.21685/2307-4205-2020-4-8.