УДК 519.711

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ КОСВЕННОГО МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

В. К. Дедков

Постановка задачи

Современный уровень развития техники значительно повысил уровень интеграции объектов, повысил требования к надежности сложных технических систем (СТС), в том числе и к восстанавливаемым нестареющим объектам. Показателями надежности восстанавливаемых объектов служат характеристики **потоков отказов** $h(n)$, связанные причинно-следственными зависимостями с составляющими комплекса условий испытаний $\vartheta(x, y, u)$ объектов прогноза. Для применения косвенных методов прогнозирования потоков отказов восстанавливаемых технических объектов необходимо непрерывные переменные комплекса условий испытаний (или эксплуатации) объекта $[\hat{u}(t),\ \hat{x}(t),\ \hat{y}(t),\ \hat{z}(t)]$ преобразовать в последовательности некоррелированных случайных величин $[\hat{u}_n,\ \hat{x}_n,\ \hat{y}_n,\ \hat{z}_n]$, зависящих от порядкового номера нагружения (n) объекта как от параметра. Такое преобразование осуществляется по «методу некоррелированных максимумов» [1].

При косвенном методе прогнозирования надежности условием отказа в одном акте нагружения объекта является соотношение $(\hat{u} > \hat{x})$, условием безотказной работы $(\hat{u} \le \hat{x})$, где $\hat{u}$ – случайная величина нагрузки, действующей на объект в n-м нагружении, $\hat{x}$ – случайная величина сопротивляемости объекта действующей нагрузке.

Введем обозначения: $F_{\hat{u}}(x)$ – функция распределения случайной величины нагрузки в одноактном нагружении; $F_{\hat{x}}(x)$ – функция распределения сопротивляемости объекта действующей нагрузке до начала нагружений (эксплуатации); $F_{\hat{y}}(x)$ – функция распределения сопротивляемости объекта, введенного в эксплуатацию взамен отказавшего; $\hat{x}_i = \hat{x}\left[1 + b(i-1)^{\alpha}\right] - a(i-1)^{\alpha}$ – функция старения сопротивляемости объекта введенного в эксплуатацию до начала первого нагружения, a, b, α – параметры старения объекта при функционировании; $\hat{y}_n = \hat{y}\left[1 + b_x(n-1)^{\alpha_x}\right] - a_x(n-1)^{\alpha_x}$ – функция старения запасного объекта до момента n использования его взамен отказавшего, a_x, b_x, α_x – параметры старения запасного объекта при его хранении до начала применения.

Поток отказов называется **стационарным**, если вероятностность появления того или иного числа отказов на отрезке времени, равном τ, зависит только от длины этого отрезка и не зависит от того, где именно на оси времени (последовательного числа нагружений n) находится этот отрезок.

Поток отказов называется **ординарным**, если вероятность появления двух или большего числа отказов на элементарном отрезке времени $\Delta\tau$ (в одном нагружении) пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления одного отказа.

Поток называется потоком **без последействия**, если вероятность появления определенного числа отказов на некотором отрезке времени τ не зависит от чередования отказов, возникших до этого момента. Иными словами, условная вероятность наступления m отказов на интервале испытаний $[n, n + \Delta n]$, вычисленная при любом предположении о чередовании отказов до момента n, равна безусловной вероятности $P_{\hat{m}}(\Delta n; n]$ того же события.

Поток, обладающий свойством стационарности, ординарности и отсутствием последействия, называется **простейшим** потоком.

Интегральное уравнение восстановления

В данном исследовании рассматриваются **одномерные** потоки отказов, обусловленные действием нагрузки определенной физической природы. Условие одномерности потока отказов однозначно определяет его ординарность. В теории потоков (восстановлений) [2] показано, что если поток простейший, т.е. обладает свойствами стационарности, ординарности и отсутствием последействия, то параметр потока отказов численно равен **интенсивности отказа** $h(n) = \psi(n)$. Для асимптотически стационарных потоков справедливо аналогичное равенство

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = \psi(n). \tag{1}$$

В дальнейшем будем пользоваться в основном лишь понятием интенсивности потока отказов, обозначив его через $h(n)$.

С учетом всех факторов, влияющих на вероятность отказа $P(\hat{u}_n > \hat{z}_n)$ объекта в n-м нагружении, получим следующее выражение для определения интенсивности потока отказов $h(n)$ [1]:

$$h(n) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{u}}(x; x_n) \prod_{i=1}^{n-1} F_{\hat{u}}(x; x_i)\ \phi_{\hat{x}}(x)\ dx +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1} h(j) \int_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{u}}(x; x_{n-j}) \prod_{i=1}^{n-j-i} F_{\hat{u}}(x; x_i)\ \phi_{\hat{y}}\left(\frac{x+A_j}{B_j}\right)\frac{1}{|B_j|}dx, \tag{2}$$

где

$$(\hat{x}: -\infty < x < \infty),\ (\hat{y}: -\infty < y < \infty),\ (\hat{u}: -\infty < u < \infty),\ [n = 1(1)\infty];$$

$$F_{\hat{u}}(x; x_i) = F_{\hat{u}}\left\{x[1 + b(i-1)^{\alpha}] - a(i-1)^{\alpha}\right\}, R_{\hat{u}}(x; x_i) = 1 - F_{\hat{u}}(x; x_i);$$

$$A_i = a_x(j-1)^{\alpha_x};\ B_j = 1 + b_x(1-j)^{\alpha_x}, [i = 1(1)n-1],\ [j = 1(1)n-1].$$

Интенсивность потока отказов $h(n)$ представляет собой решетчатую функцию, определенную лишь при целочисленных значениях аргумента n.

Интегралы в выражении (2) отличаются один от другого, во-первых, количеством предыдущих нагружений до рассматриваемого момента времени (номера нагружения n), а, во-вторых, в общем случае, законами распределения сопротивляемостей объектов замены в момент установки их взамен отказавших, т.е. $\phi_{\hat{z}}(x) = \phi_{\hat{x}}(x)$ – в момент начала эксплуатации (прогнозирования) и $\phi_{\hat{z}}(x) = \phi_{\hat{y}}\left(\frac{x+A_j}{B_j}\right)\frac{1}{|B_j|}$ – для момента возобновления эксплуатации после устранения отказа в любом j-м восстановлении. Различия в аргументе n не затрагивают причин появления отказа и не влияют на вероятностные свойства и характер распределения случайной величины $\hat{n}$, т.е. не изменяют при прочих равных условиях ряд распределения $P_{\hat{n}}(n)$, чего нельзя сказать о плотностях распределения сопротивляемости объектов замены в моменты начала их функционирования. Исходный уровень сопротивляемости объектов, являясь одним из факторов, влияющих на появление отказа, непосредственно определяет характер распределения $P_{\hat{n}}(n)$ случайной величины $\hat{n}$. Поэтому, имея дело с объектами, обладающими различными в стохастическом смысле сопротивляемостями, мы имеем дело с различными случайными величинами наработок на отказ $\hat{n}_j$, а следовательно, и с различными при прочих условиях рядами распределения вероятностей отказов $P_{\hat{n}_j}(n)$. Обозначим соответствующие интегралы в выражении (2) как

$$P_{\hat{n}_0}(n) \overset{d}{=} \int_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{u}}(x; x_n) \prod_{i=1}^{n-1} F_{\hat{u}}(x; x_i) \phi_{\hat{x}}(x) dx\ , \tag{3}$$

$$P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)\overset{d}{=}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{u}}\left(x; x_{n-j}\right)\prod_{i=1}^{n-j-i} F_{\hat{u}}\left(x; x_i\right)\phi_{\hat{y}}\left(\frac{x+A_j}{B_j}\right)\frac{dx}{\left|B_j\right|}, \quad (4)$$

где $P_{\hat{n}_0}\left(n\right)$ представляет собой вероятность отказа в n-м нагружении объекта, поставленного на эксплуатацию в начальный момент времени t_0, (n_0), а $P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)$ – вероятность отказа в n-м нагружении объекта, функционирование которого началось после j-го нагружения для всех [$j = 1(1)n - 1$].

Принимая во внимание аналогию между непрерывным временем безотказной работы объекта и числом n его успешных нагружений до отказа, $P_{\hat{n}_0}\left(n\right)$ можно рассматривать как дискретный аналог плотности распределения времени безотказной работы

$$\phi_{\hat{n}_0}\left(t\right)=\sum_{n} P_{\hat{n}_0}\left(n\right)\delta\left(t-n\right), \quad (5)$$

где $\delta\left(t-n\right)-$ дельта функция Дирака; $t-$ текущее время.

С учетом (3) и (4) выражение (2) для определения интенсивности потока отказов восстанавливаемого объекта может быть представлено в виде

$$h\left(n\right)=P_{\hat{n}_0}\left(n\right)+\sum_{j=1}^{n-1} h\left(j\right)P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)[n=1\left(1\right)\infty], \quad (6)$$

где $P_{\hat{n}_0}\left(n\right)$ представляет собой вероятность отказа в n-м нагружении объекта, поставленного на эксплуатацию в начальный момент времени t_0, (n_0); $P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)$ – вероятность отказа в n-м нагружении объекта, функционирование которого началось после j-го нагружения, т.е. после восстановления объекта или включения в работу взамен отказавшего для всех [$j = 1(1)n - 1$]; n – дискретный аналог текущего времени t работы объекта (нагружения) (вводится при преобразовании непрерывного случайного процесса нагружения в дискретную последовательность некоррелированных случайных нагрузок [1]); $\hat{n}$ – случайная величина наработки объекта до отказа.

Выражение (6) показывает, что интенсивность ординарного потока отказов $h\left(n\right)$ в любом n-м нагружении представляет собой сумму вероятностей отказов в этом нагружении восстанавливаемого объекта при всех возможных исходах испытаний, предшествующих моменту n.

По структуре приведенное выше основное уравнение восстановления СТС представляет собой уравнение прогнозирования показателей надежности восстанавливаемого объекта в серии независимых последовательных нагружений, являющейся моделью непрерывного процесса нагружения. Этой задаче были подчинены разработанные выше математические модели прогнозирования как случайного процесса нагружения $\hat{u}\,(t)$, так и случайных процессов изменения сопротивляемости $\hat{x}\,(t)$, $\hat{y}\,(t)$, $\hat{z}\,(t)$.

Преобразование случайного процесса нагружения $\hat{u}\left(t\right)$ по методу некоррелированных максимумов обеспечивает вероятностное описание этого процесса по данным одной, имеющей ограниченную длину реализации (если такой процесс обладает свойством эргодичности). Для описания случайных процессов старения сопротивляемости $\hat{x}\,(t)$, $\hat{y}\,(t)$, $\hat{z}\,(t)$ используется информации о вероятностных свойствах объектов в начальные моменты эксплуатации.

Прогнозирование интенсивности потока отказов восстанавливаемого нестареющего объекта

При применении косвенного метода прогнозирования показателей надежности восстанавливаемых объектов основная характеристика потока отказов – интенсивность потока $h(n)$, находится по формуле (6).

Величины вероятностей $P_{\hat{n}_0}\left(n\right)$ и $P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)$ определяются по формуле [1]

$$P_{\hat{n}_0}\left(n\right)\overset{d}{=}\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{u}}\left(x; x_n\right)\prod_{i=1}^{n-1} F_{\hat{u}}\left(x; x_i\right)\phi_{\hat{x}}\left(x\right)dx\,, \quad (7)$$

$$P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right) \overset{d}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{u}}\left(x; x_{n-j}\right) \prod_{i=1}^{n-j-i} F_{\hat{u}}\left(x; x_i\right) \phi_{\hat{y}}\left(\frac{x+A_j}{B_j}\right) \frac{dx}{\left|B_j\right|}, \tag{8}$$

где $F_{\hat{u}}\left(x\right)$ – функция распределения случайной величины нагрузки в одноактном нагружении; $F_{\hat{x}}\left(x\right)$ – функция распределения сопротивляемости объекта действующей нагрузке до начала нагружений (эксплуатации); $F_{\hat{y}}\left(x\right)$ – функция распределения сопротивляемости объекта, введенного в эксплуатацию взамен отказавшего; $\hat{x}_i = \hat{x}\left[1+b\left(i-1\right)^{\alpha}\right] - a\left(i-1\right)^{\alpha}$ – функция старения сопротивляемости объекта введенного в эксплуатацию до начала первого нагружения, a, b, α – параметры старения объекта при функционировании; $\hat{y}_n = \hat{y}\left[1+b_x\left(n-1\right)^{\alpha_x}\right] - a_x\left(n-1\right)^{\alpha_x}$ – функция старения запасного объекта до момента n использования его взамен отказавшего, a_x, b_x, α_x – параметры старения запасного объекта при его хранении до начала применения; $\hat{z}_n = \hat{z}\left[1+b\left(n-1\right)^{\alpha}\right] - a\left(n-1\right)^{\alpha}$ – функция старения сопротивляемости $\hat{z}_n$ объекта, восстановленного в момент времени n, a, b, α – параметры старения объекта при функционировании.

В частном случае, рассматриваемом в данной статье, при отсутствии старения запасных объектов при хранении $(a_x = b_x = \alpha_x = 0)$ восстановление сопротивляемости объекта после отказов производится каждый раз до некоторого в стохастическом смысле неизменного уровня $\hat{y}$ с плотностью распределения $\phi_{\hat{y}}\left(x\right)$ для $\left[j = 1(1)n-1\right]$, при этом имеем

$$P_{\hat{n}_1}\left(n-j\right) = P_{\hat{n}_2}\left(n-j\right) = \ldots = P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right) = \ldots = P_{\hat{n}_{n-1}}\left(n-j\right) = P_{\hat{n}}\left(n-j\right), \tag{9}$$

где $P_{\hat{n}}\left(n-j\right) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{u}}\left(x; x_{n-j}\right) \prod\limits_{i=1}^{n-j-i} F_{\hat{u}}\left(x; x_i\right) \phi_{\hat{y}}\left(x\right) dx$.

С учетом (9) выражение (6) принимает вид

$$h\left(n\right) = P_{\hat{n}_0}\left(n\right) + \sum_{j=1}^{n-1} h\left(j\right) P_{\hat{n}}\left(n-j\right), [n = 1(1)\ \infty], \tag{10}$$

и закон распределения $P_{\hat{n}}\left(n-j\right)$ становится безусловным, так как для всех j уровень восстановления свойств объекта после отказа в любом нагружении вплоть до n–1 остается неизменным.

Если все случайные величины наработок на отказ $\hat{n}_1, \hat{n}_2, \ldots \hat{n}_j \ldots, \hat{n}$ имеют один и тот же закон распределения, как в случае (10), то такой поток отказов $I(n)$ называется **рекурентным потоком**.

Если же $P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right) = P_{\hat{n}}\left(n-j\right)$, $[j = 2(1)\infty]$, а $P_{\hat{n}_1}\left(n-j\right) \neq P_{\hat{n}}\left(n-j\right)$, то поток отказов $I(n)$ называется **рекурентным потоком с запаздыванием**. Рекурентной называют формулу, которая позволяет шаг за шагом определить любой член последовательности, если известны j ее первых членов.

Если в дополнение к условию (9) потребовалось, чтобы восстановление после каждого отказа осуществлялось до первоначального в стохастическом смысле уровня сопротивляемости, т.е. $\phi_{\hat{y}}\left(x\right) = \phi_{\hat{x}}\left(x\right)$, то нетрудно видеть, что

$$P_{\hat{n}_0}\left(n\right) = P_{\hat{n}}\left(n\right), [n = 1(1)\infty], \tag{11}$$

и выражение (10) принимает вид

$$h\left(n\right) = P_{\hat{n}_0}\left(n\right) + \sum_{j=1}^{n-1} h\left(j\right) P_{\hat{n}_0}\left(n-j\right), \tag{12}$$

где, как и ранее, $P_{\hat{n}_0}\left(n\right)$ – дискретный аналог безусловной плотности распределения наработки до первого отказа.

При отсутствии старения объектов при функционировании $\left(a=b=\alpha=0, F_{\hat{u}}\left(x; x_n\right)=F_{\hat{u}}\left(x\right),\right.$ $\left.\left[n=1\left(1\right)\infty\right]\right)$ выражения (7) и (8), определяющие значения вероятностей $P_{\hat{n}_0}\left(n\right)$ и $P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)$, $[j=1\left(1\right)n-1]$, принимают вид

$$P_{\hat{n}_0}\left(n\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_u\left(x\right)F_{\hat{u}}^{n-i}\left(x\right)\phi_{\hat{x}}\left(x\right)dx\,, \tag{13}$$

$$R_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} R_{\hat{u}}\left(x\right)F_{\hat{u}}^{n-j-i}\left(x\right)\phi_{\hat{y}}\left(\frac{x+A_j}{B_j}\right)\frac{dx}{\left|B_j\right|}. \tag{14}$$

Отметим, что отсутствие старения сопротивляемости не изменяет структуры и смысла выражений (6), (10) и (12) для определения интенсивности потока отказов $h\left(n\right)$, но упрощает при этом формулы для вычисления вероятностей $P_{\hat{n}_0}\left(n\right)$ и $P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)$. Отсутствие старения сопротивляемости объекта в ходе функционирования исключает в разработанной модели необходимость изменения от нагружения к нагружению начала отсчета и масштаба нагрузки, оставляя при этом без изменения все остальные факторы, влияющие на $\phi_{\hat{z}_n}\left(x\right)$ и в целом на модель потока отказов. В теории восстановлений [2] связь между интенсивностью потока отказов $h\left(t\right)$ и плотностью распределения наработки на отказ $\phi_{\hat{\theta}}\left(t\right)$ устанавливается через основное уравнение восстановления, которое для рекуррентных потоков имеет вид

$$h\left(t\right)=\phi_{\hat{\theta}}\left(t\right)+\int\limits_{0}^{t} h\left(\tau\right)\phi_{\hat{\theta}}\left(t-\tau\right)d\tau, \tag{15}$$

где $\hat{\theta}$ – случайное время наработки на любой из отказов объекта; $t-$ текущее время с начала эксплуатации (прогнозирования); $\tau-$ текущее время с момента последнего отказа объекта.

Для рекуррентного потока с запаздыванием уравнение восстановления принимает вид [2]

$$h\left(t\right)=\phi_{\hat{\theta}_1}\left(t\right)+\int\limits_{0}^{t} h\left(\tau\right)\phi_{\hat{\theta}}\left(t-\tau\right)d\tau\,, \tag{16}$$

где $\phi_{\hat{\theta}_1}\left(t\right)$ – плотность распределения времени наработки на первый отказ объекта, отличающаяся от закона распределения наработок на второй и последующие отказы.

Сравнение выражений (10) и (16) показывает, что по своей структуре и по физическому смыслу выражение (10) является дискретным аналогом известного уравнения восстановления (16) [2] для рекурентных потоков с запаздыванием. При этом распределение $P_{\hat{n}}\left(n\right)$ можно рассматривать как дискретный аналог закона распределения наработки между отказами $\phi_{\hat{\theta}}\left(t\right)$. Аналогичный вывод можно сделать и из сравнения выражений (12) и (15) для простых рекуррентных потоков.

Выражение (6) следует рассматривать как более общую дискретную форму основного уравнения восстановления по сравнению с известным уравнением восстановления (16) для непрерывного времени. Формула (6) позволяет, в общем случае, определять интенсивность ординарного потока отказов $h\left(n\right)$ при различных законах распределения наработки на очередной отказ обусловленных старением объектов, используемых для замены отказавших.

Заключение

Получаемые с помощью приведенных выше моделей функции $h\left(n\right)$ $P_{\hat{n}_0}\left(n\right)$ и $P_{\hat{n}_j}\left(n-j\right)$ в зависимости от характера процессов нагружения $(F_{\hat{u}}\left(u\right))$ и параметров старения $(a, b, \alpha, a_x, b_x, \alpha_x)$, а также от уровня восстановления сопротивляемости после отказов $\hat{y}$ могут принимать различную, зачастую «нетипичную» форму. Именно действительное изменение этих вероятностей во времени, а не «типовой» закон их изменения, представляет основной интерес для практики.

При необходимости перехода к типовому теоретическому закону распределения наработки на отказ СТС, наличие законов $P_{\hat{n}}(n)$ и $P_{\hat{n}_j}(n)$ всегда позволяют оценить погрешность такого перехода, а следовательно, и погрешность замены реального потока отказов теоретической моделью.

Список литературы

1. Дедков, В. К. Косвенные методы прогнозирования надежности / В. К. Дедков, Н. А. Северцев. – М. : ВЦ им. Дородницына РАН, 2006. – 272 с.
2. Кокс, Д. Теория восстановления / Д. Кокс, В. Смит. – М. : Сов. радио, 1967. – 299 с.

УДК 519.711

Дедков, В. К.

Интегральное уравнение восстановления на основе косвенного метода измерения показателей надежности сложных технических объектов / В. К. Дедков // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 1. С. – 58–63.

Дедков Виталий Кириллович
доктор технических наук, профессор,
научный сотрудник отдела безопасности
и нелинейного анализа,
Учреждение Российской академии наук,
Вычислительный центр
им. А. А. Дородницына РАН
119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40.
8-495-135-61-95
E-mail: dedkov-33@rambler.ru

V. Dedkov
Doctor of Technical Science, professor, the scientific
worker of the division of safety and nonlinear analysis
the establishment of the Russian academy of sciences
computer center A. A. Dorodnitsyn,
Russian academy of sciences
119333, Moscaw, Vavilova street, 40.
8-495-135-61-95
E-mail: dedkov-33@rambler.ru

Аннотация. В данной статье рассматривается косвенный метод измерения и прогнозирования интенсивности потока отказов восстанавливаемого нестареющего объекта и дается сравнение этого метода с методом прямого измерения. Делается вывод основного интегрального уравнения восстановления на основе косвенного метода измерения показателей надежности. Показана физическая сущность процессов, отображаемых различными составляющими этого уравнения.

Abstract. In this article the indirect method of measurement and forecasting of intensity of a stream of refusals of restored ageless object is considered and comparison of this method with a method of direct measurement is given. The conclusion of the main integrated equation of restoration on the basis of an indirect method of measurement of indicators of reliability is drawn. The physical essence of the processes displayed by various components of this equation is shown.

Ключевые слова: интегральное уравнение восстановления, поток отказов, интенсивность потока, параметр потока, простейший поток отказов, нагружение, сопротивляемость, случайный стационарный процесс нагружения.

Key words: integrated equation of restoration, stream of refusals, intensity of a stream, stream parameter, the simplest stream of refusals, loading, resilience, casual stationary process of loading.