ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 681:519.6

К ПРОБЛЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

А. И. Фесечко

Решение задачи динамики вращающихся твердых тел с полостями, содержащими жидкость, относящейся к числу трудных задач классической механики, остается в наше время наиболее приоритетной. Это связано с развитием ракетной и космической техники, широкой программой исследования космического пространства при изучении динамики космических аппаратов с запасами жидкого топлива. Рассматриваемые в статье вопросы могут найти свое применение при проектировании быстровращающихся роторов, гироскопов, центрифуг, имеющих внутри себя полости, заполненные жидкостью.

Сведение интегрального уравнения к системе дифференциальных уравнений

В статье при решении задачи управления динамической системой, представляющей собой твердое тело с полостью, содержащей идеальную жидкость, используется выражение для $\vec{\Omega}(t)$ как функции управляющего момента $\vec{M}(t)$, с помощью которого можно изменять состояние динамической системы, переводя ее из одного состояния в другое.

Рассмотрим выражение для угловой скорости, полученное в [1, 2]:

$$\vec{\Omega}(t)=\int_0^t \vec{M}(\tau)(Xe^{p^{(1)}(t-\tau)}+Ye^{p^{(2)}(t-\tau)})d\tau. \quad (1)$$

Для решения различных задач оптимального управления необходимо применить хорошо развитый аппарат Гамильтона–Понтрягина [3, 4]. С этой целью интегральное соотношение (1) необходимо преобразовать к системе дифференциальных уравнений. Введем комплексные $\Omega=\Omega_x-i\Omega_y$, $M=M_x-iM_y$, записывая выражение для Ω_x и Ω_y в виде

$$\begin{aligned}\Omega_x(t)=&\int_0^T M_x(\tau)(X\cos(\eta^{(1)}(t-\tau))+Y\cos(\eta^{(2)}(t-\tau)))d\tau+\\&+\int_0^T M_y(\tau)(X\sin(\eta^{(1)}(t-\tau))+Y\sin(\eta^{(2)}(t-\tau)))d\tau;\end{aligned} \quad (2)$$

$$\Omega_y(t)=\int_0^T -M_x(\tau)(X\sin(\eta^{(1)}(t-\tau))+Y\sin(\eta^{(2)}(t-\tau)))d\tau+ \\ +\int_0^T M_y(\tau)(X\cos(\eta^{(1)}(t-\tau))+Y\cos(\eta^{(2)}(t-\tau)))d\tau. \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$A(t)=\int_0^t\left[M_x(\tau)X\cos(\eta^{(1)}(t-\tau))+M_y(\tau)X\sin(\eta^{(1)}(t-\tau))\right]d\tau,$$

$$B(t)=\int_0^t\left[M_x(\tau)X\cos(\eta^{(2)}(t-\tau))+M_y(\tau)X\sin(\eta^{(2)}(t-\tau))\right]d\tau,$$

$$C(t)=\int_0^t\left[-M_x(\tau)X\sin(\eta^{(1)}(t-\tau))+M_y(\tau)X\sin(\eta^{(1)}(t-\tau))\right]d\tau,$$

$$D(t)=\int_0^t\left[-M_x(\tau)X\sin(\eta^{(1)}(t-\tau))+M_y(\tau)X\sin(\eta^{(1)}(t-\tau))\right]d\tau.$$

Тогда $\Omega_x(t)=A(t)+B(t)$, и $\Omega_y(t)=C(t)+D(t)$. Для выражения (1) можно записать следующую эквивалентную ему систему:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\begin{cases}\dot{\Omega}_x(t)=M_x(t)(X+Y)+\eta^{(1)}C(t)+\eta^{(2)}D(t),\\ \dot{\Omega}_y(t)=M_y(t)(X+Y)+\eta^{(1)}A(t)+\eta^{(2)}B(t),\\ \dot{A}(t)=M_x(t)X+\eta^{(1)}C(t),\\ \dot{B}(t)=M_x(t)X+\eta^{(2)}C(t),\\ \dot{C}(t)=M_y(t)X+\eta^{(1)}C(t),\\ \dot{D}(t)=M_y(t)X+\eta^{(2)}C(t).\end{cases} \qquad \vec{x}(0)=\begin{cases}\Omega_x(0)=0,\\ \Omega_y(0)=0,\\ A(0)=0,\\ B(0)=0,\\ C(0)=0,\\ D(0)=0;\end{cases} \quad (4)$$

Введем следующие обозначения $(n=6, m=2)$:

$$A_{nxn}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\eta^{(1)}&\eta^{(2)}\\0&0&-\eta^{(1)}&-\eta^{(2)}&0&0\\0&0&0&0&\eta^{(1)}&0\\0&0&0&0&0&\eta^{(2)}\\0&0&-\eta^{(1)}&0&0&0\\0&0&0&-\eta^{(2)}&0&0\end{pmatrix};\ A_{nxn}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\eta^{(1)}&\eta^{(2)}\\0&0&-\eta^{(1)}&-\eta^{(2)}&0&0\\0&0&0&0&\eta^{(1)}&0\\0&0&0&0&0&\eta^{(2)}\\0&0&-\eta^{(1)}&0&0&0\\0&0&0&-\eta^{(2)}&0&0\end{pmatrix};$$

$$B_{nxm}=\begin{pmatrix}X+Y&0\\0&X+Y\\X&0\\Y&0\\0&X\\0&Y\end{pmatrix}\quad x_{0_{nx1}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \quad (5)$$

С учетом (5) систему (4) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t) + B\vec{M}(t), \\ &\vec{x}(t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{6}$$

В итоге имеем систему из шести уравнений.

Задача безусловной минимизации с терминальным функционалом

Рассмотрим задачу оптимального управления без ограничений на управляющий момент. Здесь вводится классический квадратичный терминальный функционал с квадратичной штрафной функцией.

Задача оптимального управления системой (6) имеет вид

$$J(M) = (\Omega_x(T) - \Omega_1^0)^2 + (\Omega_y(T) - \Omega_2^0)^2 + \gamma\int_0^T (M_x^2(t) + M_y^2(t))dt \to \min$$

или в векторном виде

$$j(M) = \left\| Z\vec{x}(T;M) - b \right\|_{E^n}^2 + \gamma\int_0^T \left\| \vec{M}(t) \right\|_{E^m}^2 dt \to \min, \tag{7}$$

где $\vec{M}(t) = (M_x(t), M_y(t))^T$ – неизвестная функция управления, γ – заданное действительное положительное число, $Z = \left\| z_{i,j} \right\|_{6\times 6}$ – матрица 6×6, причем отличны от нуля только $z_{1,1} = z_{2,2}$, $b = (\Omega_1^0, \Omega_1^0, 0, 0, 0, 0)^T$ – столбец, Ω_i^0, $i = 1,2$ – заданные действительные числа.

Будем решать задачу (7) с использованием принципа максимума Л. Д. Понтрягина. Функция Гамильтона–Понтрягина имеет вид

$$H = \gamma\left\| \vec{M}(t) \right\|^2 + \left\langle A\vec{x}(t) + B\vec{M}(t), \psi(t) \right\rangle. \tag{8}$$

Сопряженная система

$$\begin{cases} \psi(t) = -H'_x = -A^T\psi(t), \\ \psi(T) = \Phi'(x(T;\vec{M})) = 2Z \cdot (Zx(T,\vec{M}) - b). \end{cases} \tag{9}$$

Получим выражения для оптимального управления

$$\begin{aligned} &H'_{M_x} = 2\gamma M_x + (X+Y)\psi_1 + X\psi_3 + Y\psi_4, \\ &M_x^* = -\frac{(X+Y)\psi_1 + X\psi_3 + Y\psi}{2\gamma}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &H'_{M_y} = 2\gamma M_y + (X+Y)\psi_2 + X\psi_5 + Y\psi_6, \\ &M_y^* = -\frac{(X+Y)\psi_2 + X\psi_5 + Y\psi_6}{2\gamma}. \end{aligned} \tag{11}$$

Для определения оптимального управления разрешим сопряженную систему (9). Из вида матрицы A^T можем сразу выписать выражения для первых двух компонент $\psi(t)$

$$\psi_1(t) = 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0),$$

$$\psi_2(t) = 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0).$$

Оставшиеся компоненты найдем, решив следующую систему:

$$\begin{aligned}
\psi_3(t) &= 2\eta^{(1)}(\Omega_y(T) - \Omega_2^0) + \eta^{(1)}\psi_5(t),\\
\psi_4(t) &= 2\eta^{(2)}(\Omega_y(T) - \Omega_2^0) + \eta^{(2)}\psi_6(t),\\
\psi_5(t) &= -2\eta^{(1)}(\Omega_x(T) - \Omega_1^0) - \eta^{(1)}\psi_3(t),\\
\psi_6(t) &= -2\eta^{(1)}(\Omega_x(T) - \Omega_1^0) - \eta^{(1)}\psi_4(t).
\end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения 1 и 3, 2 и 4 системы (12) можно решить независимо. В итоге получим:

$$\begin{aligned}
\psi_3(t) &= 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)(\cos((T-t)\eta^{(1)}) - 1) - 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)\sin(\eta^{(1)}(T-t));\\
\psi_4(t) &= 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)(\cos((T-t)\eta^{(2)}) - 1) - 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)\sin(\eta^{(2)}(T-t));\\
\psi_5(t) &= 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)(\cos(\eta^{(1)}(T-t)) - 1) + 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)\sin(\eta^{(1)}(T-t));\\
\psi_6(t) &= 2(\Omega_x(T) - \Omega_1^0)(\cos(\eta^{(2)}(T-t)) - 1) + 2(\Omega_y(T) - \Omega_2^0)\sin(\eta^{(2)}(T-t)).
\end{aligned}$$

Полученные решения сопряженной системы нужно подставить в (10) и (11) и окончательно значения оптимального управления можно будет записать, определив параметры $\Omega_x(t)$ и $\Omega_y(t)$. Для этого можно воспользоваться системой двух линейных уравнений относительно $\Omega_x(t)$ и $\Omega_y(t)$, которая получается из (2) и (3) при $t = T$ подстановкой в нее выражений (10) и (11) и найденных решений сопряженной системы (9), а именно:

$$\begin{aligned}
\Omega_x(T) = &\int_0^T M_x^*(\tau)(X\cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + Y\cos(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau +\\
&+\int_0^T M_y^*(\tau)(X\cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + Y\sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau;
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_y(T) = &\int_0^T M_x^*(\tau)(X\sin(\eta^{(1)}(T-\tau)) + Y\sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau +\\
&+\int_0^T M_y^*(\tau)(X\cos(\eta^{(1)}(T-\tau)) + Y\sin(\eta^{(2)}(T-\tau)))d\tau.
\end{aligned} \tag{14}$$

Выражения (13) и (14) окончательно решают поставленную задачу в аналитической форме.

Такой подход делает возможным широкую постановку различных задач оптимального управления, определения оптимальных конструктивно-технологических параметров динамической системы, изучения устойчивости движения управляемого объекта.

Список литературы

1. Гурченков, А. А. Момент сил внутреннего трения быстровращающегося цилиндрического сосуда, заполненного вязкой жидкостью / А. А. Гурченков // Известия вузов. Приборостроение. – 2001. – Т. 44, № 2. – С. 44–49.
2. Гурченков, А. А. Вихревые движения жидкости в полости вращающегося тела / А. А. Гурченков. – М. : Народный учитель, 2001. – 176 с.
3. Беллман, Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М. : Наука, 1965. – 460 с.
4. Беллман, Р. Некоторые вопросы математической теории управления / Р. Беллман, И. Гликсберг, О. Гросс. – М. : ИЛ, 1962.

УДК УДК 681:519.6
Фесечко, А. И.
К проблеме управления динамической системой с распределенными параметрами / А. И. Фесечко // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 2. – С. 22–26.

Фесечко Анатолий Иванович
кандидат технических наук,
доцент, научный сотрудник,
отдел безопасности и нелинейного анализа,
Учреждение Российской академии наук
Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
119333, г. Москва, ул. Вавилова, 40.
E-mail: fesechko_anatoli@mail.ru

A. Fesechko
candidate of technical sciences, docent,
the scientific worker of the division of safety
and nonlinear analysis the establishment
of the Russian academy of sciences computer center
A. A. Dorodnitsyn Russian academy of sciences
119333, Moscaw, Vavilova street, 40.
E-mail: fesechko_anatoli@mail.ru

Аннотация. В статье рассматриваются задачи управления динамической системой, представляющей собой твердое тело с полостью, содержащей идеальную жидкость.

Abstract. This paper deals with the dynamic control system, which is a solid body with a cavity containing a perfect fluid.

Ключевые слова: управление системой, динамические системы, дифференциальные уравнения, терминальный функционал, идеальная жидкость, разрывные уравнения.

Key words: management systems, dynamical systems, differential equations, terminal functionality, perfect fluid, explosive equation.