УДК 681.51

К ПРОБЛЕМЕ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

И. С. Можаровский

Введение

Идентификация систем в теории управления – определение структуры системы и ее параметров путем анализа входных и выходных данных системы. В свою очередь, идентифицируемость – это не метод восстановления ее параметров, а такое же системное свойство, как управляемость и наблюдаемость, позволяющее построить адекватную модель на выбранных данных в заданных условиях [1].

На этапе синтеза систем управления на основе прогнозирующих моделей часто ставятся задачи построения новых, сложных моделей процессов, не имеющих априорного математического описания [2]. Одним из таких процессов является процесс массообмена в промышленной ректификационной колонне (РК). Для построения моделей таких процессов необходимо убедиться, что в заданных условиях (при ограниченности выборки в силу различных, как технических, так и временных обстоятельств) можно подобрать адекватную модель, т.е. удостовериться в ее идентифицируемости.

В статье предложена методика определения степени идентифицируемости моделей с помощью алгоритма ACE (Alternating conditional expectation – чередующееся условное математическое ожидание) [3, 4] и дополнительного входа. Представлены примеры, иллюстрирующие применение предлагаемого подхода.

Постановка задачи

Пусть нелинейная модель в общем виде описывается следующим уравнением:

$$Y = f(\mathbf{X}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{d}), \tag{1}$$

где $\mathbf{X}$ – вектор состояний; $\mathbf{u}$ – внешние входные управляющие сигналы; $\mathbf{p}$ – вектор параметров; $\mathbf{d}$ – вектор измерений.

В работе рассматривается следующий класс нелинейных моделей:

$$Y = f(X_1, ..., X_n) = f_1(X_1) + f_2(X_2) + ... + f_n(X_n). \tag{2}$$

Для построения адекватной модели (1) в виде (2) могут использоваться алгоритмы, позволяющие представить нелинейную функцию как сумму нелинейных функций от каждого входа, например, алгоритм ACE [3, 4].

Ставится задача разработки методики определения идентифицируемости нелинейных моделей с применением алгоритма ACE и введением в модель дополнительного входа и исследования результатов ее использования при определении идентифицируемости моделей.

Принцип определения идентифицируемости исследуемой модели

Для определения степени идентифицируемости используется специально введенный в модель искусственный вход, содержащий случайные значения или как вариант – константу, никак не влияющий на выход. С помощью алгоритма ACE формируется оптимальное преобразование Ф для полученной выборки [3].

Оптимальное преобразование Ф включает функциональную зависимость $Y = F(X_i)$ для каждого X_i и случайные отклонения Δ, имеющие в среднем одинаковую амплитуду, величина которой обратно пропорциональна размеру выборки (числу измерений).

Разность между максимальным и минимальным значениями функции $F(X_i)$, которую восстанавливает соответствующее преобразование Ф тем больше, чем большую роль играет X_i в формировании **Y**, т.е. эта разность пропорциональна доле вклада данного X_i среди всех входов **X**. В случае неидентифицируемой модели **Y** от X_{un} не зависит, поэтому максимальное и минимальное значения $F(X_{un})$ не изменяются.

Таким образом, идентифицируемость каждого X_i можно оценить, разделив крайние значения Ф для X_i на крайние Ф для искусственного неидентифицированного X_{un}. Получающаяся величина:

$$iden = \frac{((F(X_i)\_\max - F(X_i)\_\min) + \Delta)}{\Delta}, \tag{3}$$

где *iden* – это оценка идентифицируемости модели; $F(X_i)\_\max$ – максимальное значение оптимального преобразования АСЕ для текущего входа; $F(X_i)\_\min$ – минимальное значение оптимального преобразования АСЕ для текущего входа.

Значение *iden* будет тем больше, чем лучше идентифицируемость X_i и чем больше выборка, так как Δ уменьшается с увеличением размера выборки. В (3) величина Δ является отклонением текущего значения Ф для X_i от значения, которое должно получиться в идеальном случае. Его можно оценить из функциональной зависимости $F(X_i)$, предполагая, что данная зависимость известна, как в нашем искусственно заданном случае.

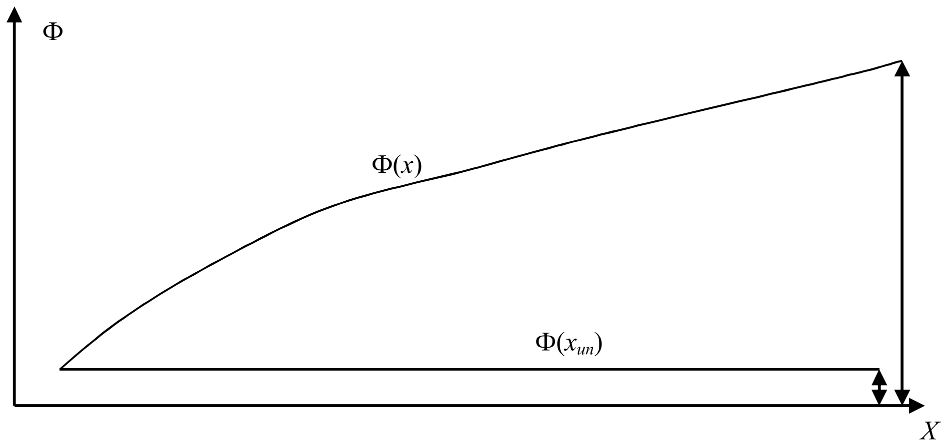

Рис. 1. Принцип определения идентифицируемости по алгоритму АСЕ

Из рис. 1 следует, что для неидентифицируемой модели весь диапазон значений в (3) определяется только ошибкой Δ и уменьшается с ростом количества измерений. Если же X_i влияет на **Y**, то он, будучи обусловленным разницей значений X_i, остается постоянным, а добавка, связанная со случайной ошибкой, уменьшается. Таким образом, показатель (3) будет увеличиваться с ростом числа измерений, а его величина будет указывать на степень идентифицируемости входа.

Подход к определению идентифицируемости исследуемой модели

Исходя из определения идентифицируемости модели можно сделать вывод, что при различных значениях входов в модель, в допустимом диапазоне для каждого входа существует определенная закономерность, посредством которой **X** преобразуется в **Y**. Она должна соблюдаться при любых допустимых значениях на входах в модель. На основе этого предлагается методика, позволяющая оценить идентифицируемость модели с помощью алгоритма АСЕ.

Шаг 1. К матрице данных (выборке) исследуемой модели присоединяем столбец со случайными значениями в диапазоне от 0 до 1 – априорно неидентифицируемый вход.

Шаг 2. Применяем алгоритм АСЕ к обновленной матрице данных для получения базового набора векторов оптимальных преобразований Ф по каждому входу исследуемой модели (с базовым набором векторов попарно сравниваются последующие вычисления *Шага 4*).

Шаг 3. В обновленной матрице данных модели к каждому столбцу добавляем случайное значение, имитирующее ошибки измерения и не изменяющее сути модели. Оно должно быть достаточно мало, чтобы практически не влиять на вид зависимости **Y** от **X**, например, в диапазоне [0,00:0,01].

Следует отметить, что добавление небольшого случайного значения делается с целью изменения результата работы алгоритма АСЕ по вычислению векторов оптимальных преобразований. Это связанно с тем, что преобразование АСЕ строится не по самим значениям *X*, а по их порядковым номерам в отсортированном массиве *X*. Поэтому достаточно поменять местами пару точек, чтобы алгоритм АСЕ изменил все точки результирующей кривой оптимального преобразования Ф.

Шаг 4. Применяем метод АСЕ к преобразованной матрице данных и получаем новый набор векторов оптимальных преобразований Ф.

Шаг 5. Вычисляем разность между результатами *Шага 2* для базового набора векторов и *Шага 4* для матрицы данных с малыми случайными вариациями значений входов и рассчитываем среднее значение квадратов отклонений преобразованной матрицы данных от базовой матрицы данных.

Шаг 6. Повторяем *Шаги 3–5* заданное число раз *N* для получения более точного усредненного результата и вычисляем среднее значение для каждого входа.

Шаг 7. Рассчитываем относительный вклад каждого входа в модель, нормированный на вклад неидентифицируемого входа по формуле

$$iden_{Xi} = \frac{mean_{Xnu}}{mean_{Xi}},$$

где $iden_{Xi}$ – оценка идентифицируемости модели по *i*-му входу; $mean_{Xnu}$ – среднее значение сумм разностей для неидентифицированного входа; $mean_{Xi}$ – среднее значение сумм разностей для текущего входа.

Шаг 8. Вычисляем среднее отклонение и средний вклад каждого входа в модель.

Пример 1

Для иллюстрации подхода определения идентифицируемости рассмотрим модель со сложной нелинейной структурой. Пусть модель имеет вид

$$Y = X1^2 + \sin(X2*3) + (X3+3) + \log(X4) \tag{4}$$

Возьмем достаточно большое число измерений *N* = 1000 для более точного определения модели. Входы в модель имеют следующий диапазон значений: *X*1 [–2,5:2,5]; *X*2 и *X*3 [0:1]; *X*4 [0:2]. После определения матрицы данных (5 × 1000) добавим дополнительный вход со стохастическими значениями в диапазоне *X*5 [0:1], некоррелирующие с выходом. Добавим к каждому значению выборки случайное значение *xerr* [0:0,009]. Применим алгоритм АСЕ и получим базовую оценку модели, набор векторов АСЕ преобразований Ф (рис. 2).

Проанализируем сформированную выборку с помощью коэффициентов корреляции табл. 1. Полученные коэффициенты корреляции не дают какого-либо определенного ответа о структуре данных. Наибольшее значение 0,3866 дал вход *X*4 (функция логарифма), но и оно мало. Остальные коэффициенты корреляции показывают неопределенность. В свою очередь алгоритм АСЕ находит структуру выборки достаточно точно (параболу, синусоиду, прямую, логарифмическую кривую) (см. рис. 2).

Таблица 1

Коэффициенты корреляции выборки примера 1

Y	*X*1	*X*2	*X*3	*X*4	*X*5
1,0000	0,0507	–0,0042	0,2665	0,3866	0,0167

Также полученную выборку исследовали на корреляционное отношение (табл. 2). Корреляционное отношение определило хорошее влияние входа $X1$, равное 0,6734, что указывает на влияние данного входа на выход, но значения корреляционных отношений остальных входов не дают определенного понимания структуры данных.

Таблица 2

Корреляционное отношение выборки примера 1

Y	$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$X5$
–	0,7621	0,2703	0,3119	0,3982	0,1148

Анализ выборки средствами корреляционного отношения и коэффициентов регрессии дал неопределенные результаты о возможной идентифицируемости модели.

Для оценки идентифицируемости применим наш подход, проведем 20 итераций сравнения оценок модели с базовыми оценками модели (рис. 3). 20 расчетов необходимо для того, чтобы получить среднее значение отклонения.

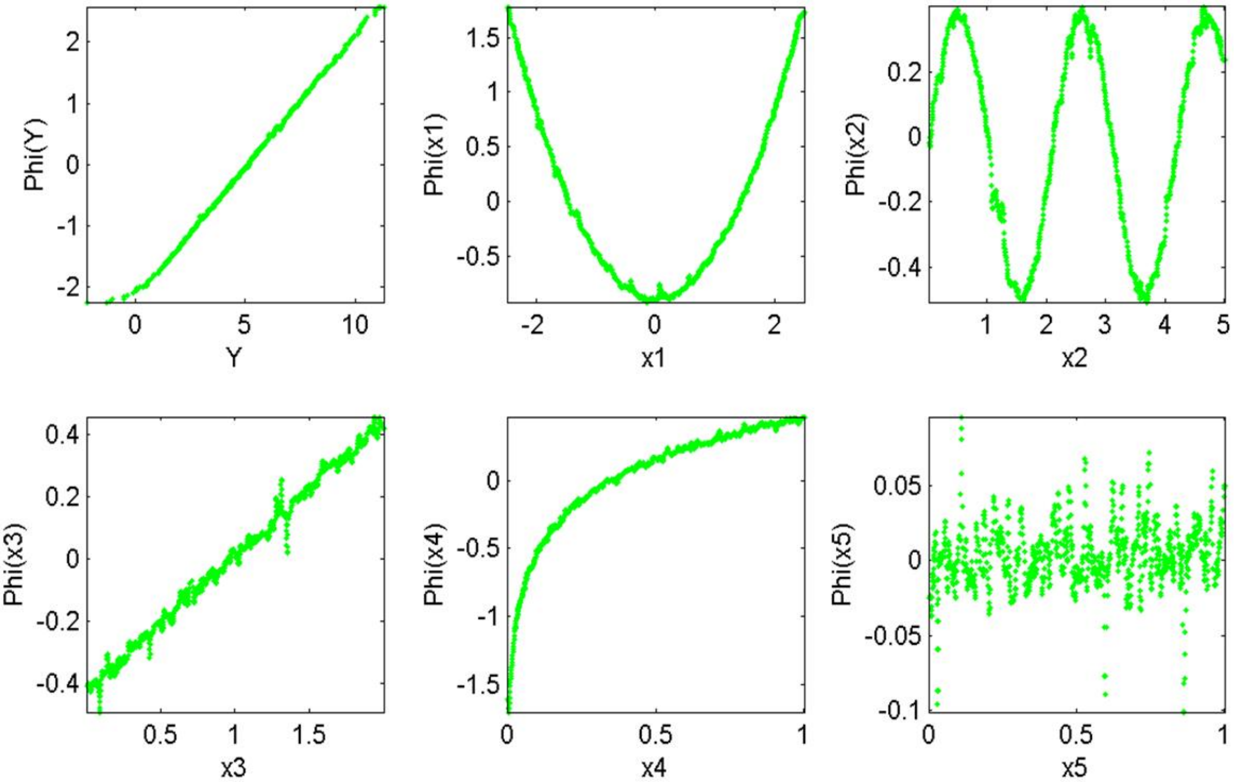

Рис. 2. Базовая матрица данных после применения алгоритма ACE

Таблица 3

Результаты применения подхода

Параметр	Y	$X1$	$X2$	$X3$	$X4$	$X5$
mean	0,032	0,043	0,107	0,132	0,113	1,45
iden	45,65	33,76	13,59	10,95	12,83	1,0000

Результатом подхода является *mean* – средняя сумма расстояний между точками базовой оценки модели от текущей оценки модели для каждого параметра (табл. 3). Значение входа $X5$ по параметру *mean* равно 1,45, что соответствует неидентифицируемости входа. Показатели значения *mean* на данном примере полностью подтверждают условия существования исследуемой модели и указывают на идентифицируемость модели.

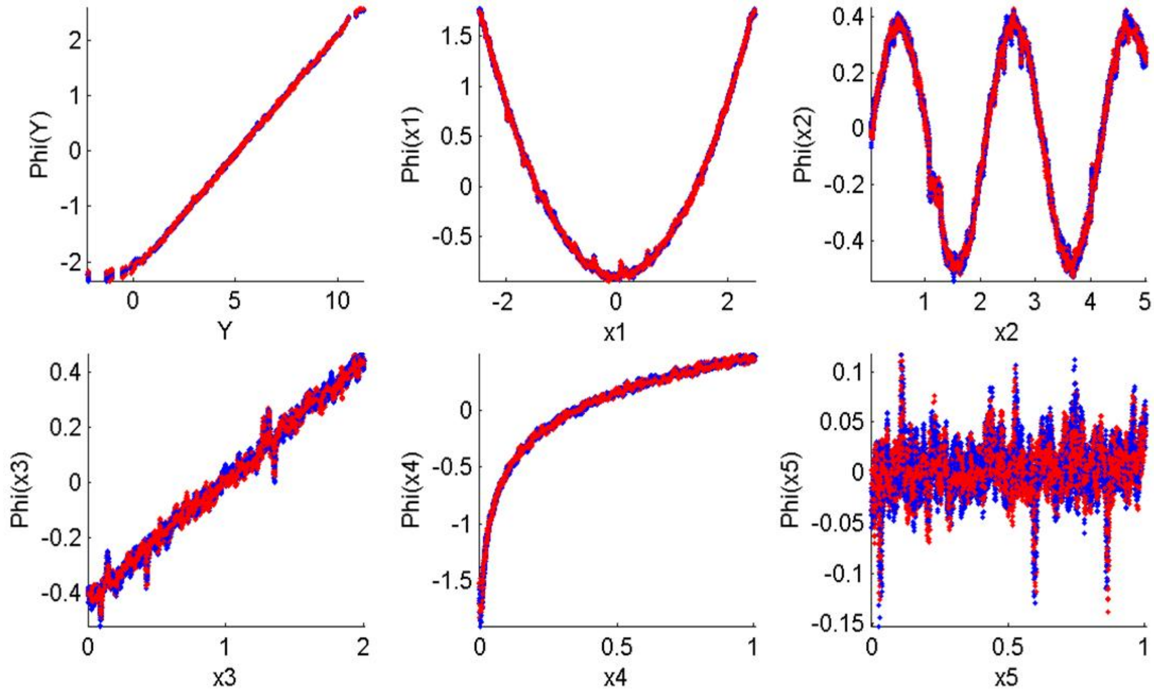

Рис. 3. Преобразованная матрица данных после применения алгоритма ACE (20 итераций)

Значения *mean* отражают устойчивость кривых: чем меньше значения, тем выше статистическая определенность функциональной связи входов. Если последняя колонка априорно абсолютно неидентифицируемая, то степень идентифицируемости можно определить сравнением остальных входов с этим искусственным входом. Строка *iden* получена из строки *mean*, где обратные значения *mean* нормированы на значение 5-й колонки.

Значение *iden* отображает вклад каждого параметра модели в отношении с априорно неидентифицируемым параметром (дополнительным входом). В рассмотренном примере можно отметить, что вход *X*1 имеет наибольший вклад в модель, а вход *X*3 – наименьший, т.е. подтверждается предположение (4).

Пример 2

Для оценки идентифицируемости модели в предыдущем примере мы использовали сложную нелинейную структуру модели. Для того чтобы показать, что подход работает верно, предлагаем рассмотреть пример с совершенно неидентифицируемыми данными.

Для этого построим хаотичную матрицу данных (5х1000), где *Y* равен случайному значению в диапазоне [0:100]; входы в модель также не связаны между собой и равны случайному значению в соответствующих диапазонах для каждого входа: *X*1 [–2,5:2,5]; *X*2 [0:5]; *X*3 [0:2]; *X*4 [0:1].

Проанализируем сформированную выборку с помощью коэффициентов корреляции (табл. 4), а также с помощью корреляционного отношения (табл. 5). Полученные результаты однозначно указывают на то, что никаких взаимосвязей в данных нет, что полностью подтверждает неидентифицируемость модели.

Таблица 4

Коэффициенты корреляции выборки примера 2

Y	*X*1	*X*2	*X*3	*X*4	*X*5
1,0000	0,0114	–0,0107	–0,0259	–0,0281	0,0135

Таблица 5

Корреляционное отношение выборки примера 2

Y	*X*1	*X*2	*X*3	*X*4	*X*5
–	0,0328	0,0921	0,0832	0,1051	0,0907

Применим разработанный подход определения идентифицируемости, получим рис. 4, 5 и табл. 6.

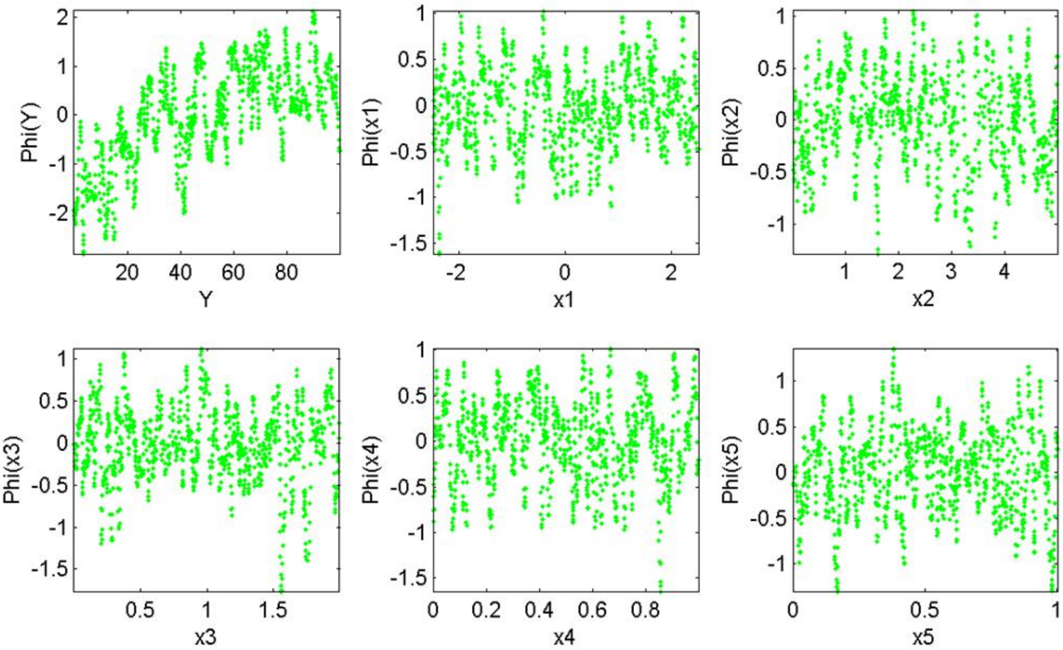

Рис. 4. Базовая матрица данных после применения алгоритма ACE

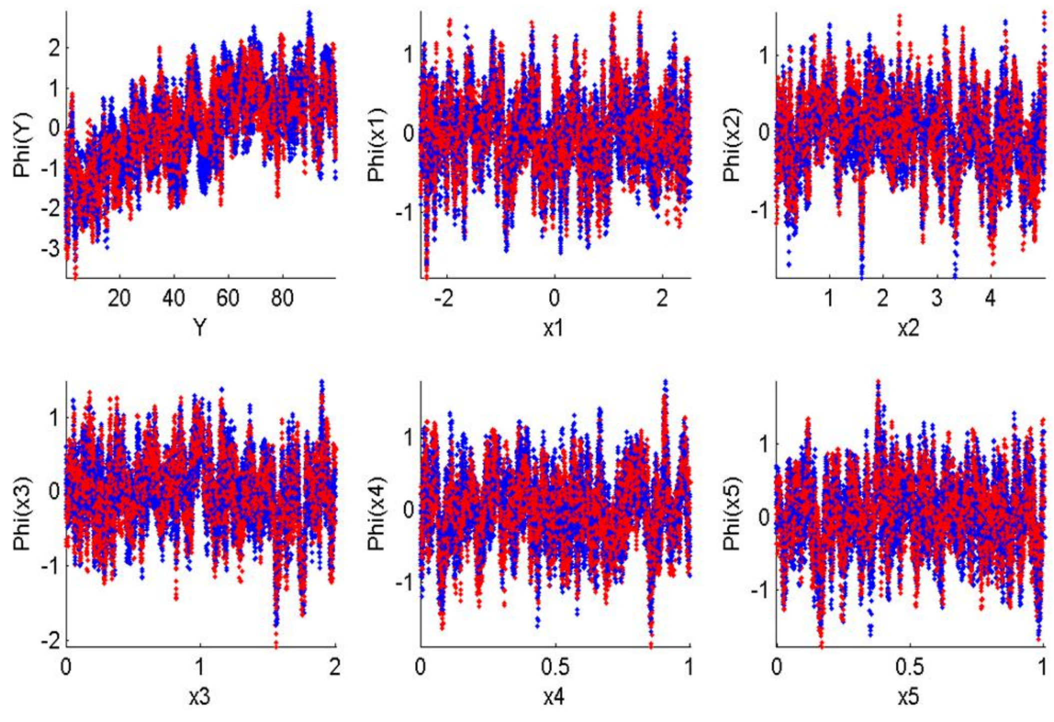

Рис. 5. Преобразованная матрица данных после применения алгоритма ACE (20 итераций)

Таблица 6

Результаты применения подхода

Параметр	*Y*	*X*1	*X*2	*X*3	*X*4	*X*5
mean	0,98	1,29	1,18	1,27	1,43	1,34
iden	1,38	1,04	1,14	1,06	0,94	1,00

Проведенные исследования показывают, что в исследуемой модели нет связей, этот факт определен по значению *mean* (см. табл. 6). Если *mean* близок к 1, то данные не имеют зависимостей, а модель неидентифицируема.

Выводы

Создана методика определения идентифицируемости моделей на основе алгоритма ACE и дополнительного входа. Методика проверена на различных моделях [4–7]. Предложенная методика применена для определения идентифицируемости моделей различных нелинейных процессов. Разработанная методика дает возможность определять идентифицируемость модели в заданных условиях при различных выборках данных, показывает относительный вес каждого предиктора относительно друг друга, определяет вес отклика относительно предикторов, определяет информативные или слабо информативные входы. Данная методика позволяет быстро, надежно, просто и наглядно оценить идентифицируемость модели, построенной на выборке достаточного объема.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов ДВО РАН № 12-I-П17-02 и № 12-I ОЭММПУ-04 и гранта ДВО-РФФИ № 11-08-98500-р_восток_а.

Список литературы

1. Балонин, Н. А. Б 20 Новый курс теории управления движением / Н. А. Балонин. – СПб. : Изд-во СПб ун-та, 2000. – 160 с.
2. Wang, D. Estimating optimal transformations for multiple regression using the ACE algorithm / D. Wang, M. Murphy // Journal of Data Science. – 2004. – V. 2. – P. 329–346.
3. Breiman, L. Estimating Optimal Transformations for Multiple Regression and Correlation / L. Breiman, J. H. Friedman // J. Amer. Statist. Assoc. – 1985. – P. 580–588.
4. Data-based identifiability analysis of non-linear dynamical models / S. Hengl, C. Kreutz, J. Timmer, T. Maiwald. // Bioinformatics. – 2007. – V. 23, № 19. – P. 2612–2618.
5. Разработка моделей показателей качества ректификационных колонн, функционирующих в предельных режимах / А. Ю. Торгашов, Г. Б. Диго, Н. Б. Диго, И. С. Можаровский // Идентификация систем и задачи управления (SICPRO'12) : тр. IX Междунар. конф. – М. : Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 2012.
6. Исследование методов идентификации моделей виртуальных анализаторов показателей качества ректификационной колонны / Г. Б. Диго, Н. Б. Диго, И. С. Можаровский, А. Ю. Торгашов // Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления : сб. докладов Всерос. науч. конф., посв. 75-летию со дня рождения акад. В. П. Мясникова (г. Владивосток, 11–17 сентября 2011 г.) [Электронный документ]. – Владивосток : ИАПУ ДВО РАН, 2011. – С. 412–418.
7. Исследование моделей виртуальных анализаторов массообменного технологического процесса ректификации / Г. Б. Диго, Н. Б. Диго, И. С. Можаровский, А. Ю. Торгашов // Информатика и системы управления. – 2011. – № 4 (30). – С. 17–27.

УДК 681.51
Можаровский И. С.
К проблеме идентифицируемости моделей нелинейных объектов управления / И. С. Можаровский // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 2. – С. 44–50.

Можаровский Игорь Сергеевич
аспирант,
институт автоматики
и процессов управления ДВО РАН
690041, г. Владивосток, пр. Радио, д. 5.
E-mail: mozharovskiy@iacp.dvo.ru

I. Mozharovsky
institute of Automation and management of FEB RAS
690041, Vladivostok, the Radio 5.
E-mail: mozharovskiy@iacp.dvo.ru

Аннотация. Рассматривается методика определения идентифицируемости нелинейных объектов систем управления на основе прогнозирующих моделей с использованием алгоритма чередующегося условного математического ожидания и дополнительного входа.

Abstract. Discussed method based on the ACE algorithm for determining the identifiability of models formed on samples with a complex nonlinear data structure.

Ключевые слова: модель; выборка данных; идентифицируемость; нелинейность; алгоритм.

Key words: model; data; identifiability; nonlinear; algorithm.