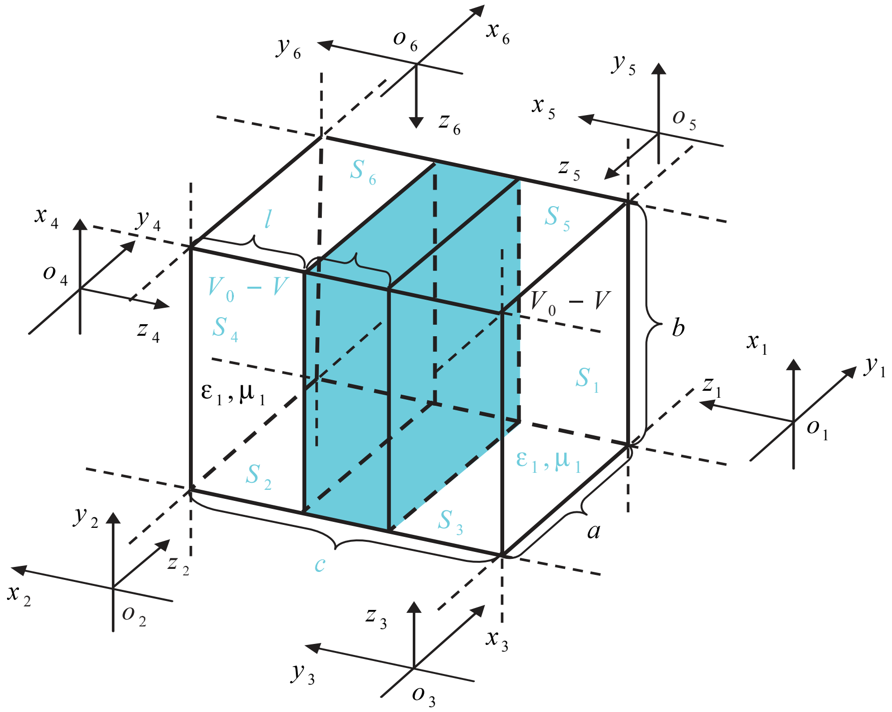
УДК 623.4.055

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ ФАБРИ–ПЕРО ПРИ НАКЛОННОМ ПАДЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

А. Д. Пимкин



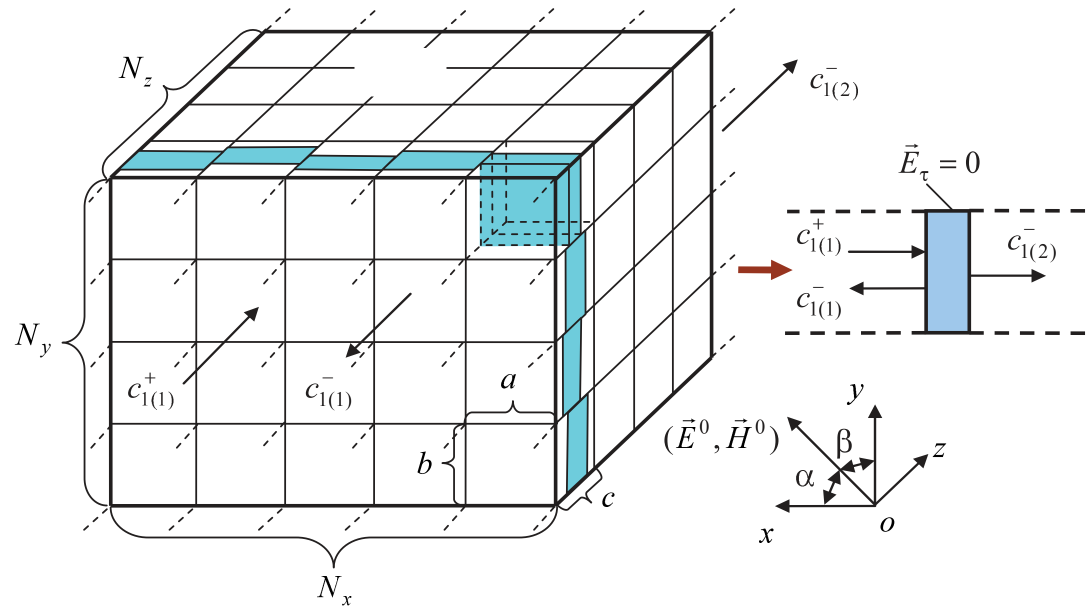


Рис. 2. Модель оптического фильтра с неоднородными диэлектрическими слоями:
а – декомпозиция на автономные блоки; *б* – рекомпозиционная модель – виртуальные каналы Флоке автономных блоков; $\left(\vec{E}^0, \vec{H}^0\right)$ – падающая ТЕМ-волна; $c^{+}_{1(1)}, c^{-}_{1(1)}, c^{-}_{1(2)}$ – амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн в каналах Флоке; $N_x \times N_y \times N_z$ – количество автономных блоков

Касательные составляющие электрических и магнитных полей на гранях «сшиваемых» параллелепипедов представлены рядами Фурье[1]:

$$\vec{E}_1 = \sum_{l=1}^{\infty} a_{l(1)} \vec{e}_{l(1)}, \vec{H}_1 = \sum_{l=1}^{\infty} b_{l(1)} \vec{h}_{l(1)} \text{ на } S_1; \tag{1}$$

$$\vec{E}_4 = \sum_{l=1}^{\infty} a_{l(4)} \vec{e}_{l(4)}, \vec{H}_4 = \sum_{l=1}^{\infty} b_{l(4)} \vec{h}_{l(4)} \text{ на } S_4. \tag{2}$$

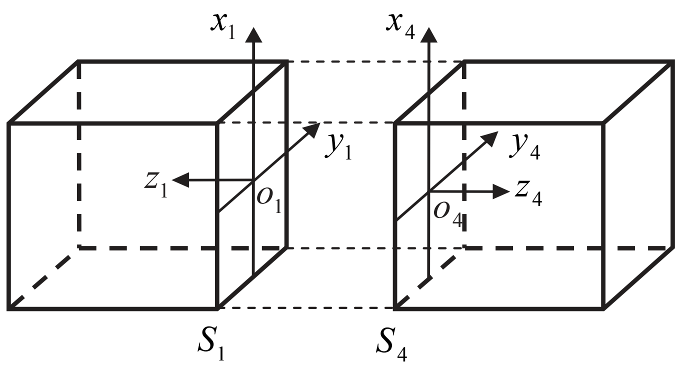


Рис. 3. Рекомпозиция автономных блоков в локальных системах координат на гранях параллелепипедов

Локальные системы координат на гранях S_1 и S_4 (рис. 3) отличаются лишь продольными координатами – они имеют противоположные направления. Положительное направление вектора Пойнтинга для собственных волн канала Флоке в системе координат грани S_1 является отрицательным в системе координат грани S_4:

$$\vec{e}_{l(1)} \times \vec{h}^{*}_{l(1)} = -\vec{e}_{l(4)} \times \vec{h}^{*}_{l(4)}, l = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Из выражения (3) следует [1]:

$$\vec{e}_{l(1)}=\vec{e}_{l(4)},\vec{h}_{l(1)}=-\vec{h}_{l(4)},\, l=1,2,... \tag{4}$$

Условия непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей $\vec{E}_1=\vec{E}_4, \vec{H}_1=\vec{H}_4$ на «сшиваемых» гранях S_1 и S_4, представленных рядами Фурье (1), (2), с учетом соотношений (4), сводятся к равенству коэффициентов:

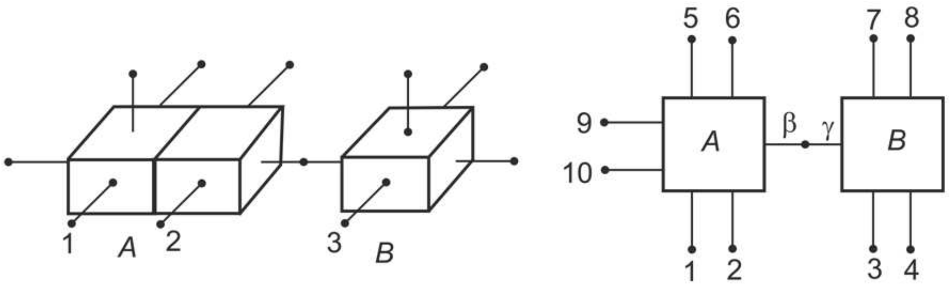
$$a_{l(1)}=a_{l(4)}, b_{l(1)}=-b_{l(4)},\, l=1,2,... \tag{5}$$

На «сшиваемых» гранях S_1 и S_4 касательные составляющие электромагнитного поля можно представить также и в виде суперпозиции составляющих прямых и обратных волн каналов Флоке:

$$\vec{E}_1=\sum_{k=1}^{\infty}(c^{+}{}_{k(1)}+c^{-}{}_{k(1)})\vec{e}_{k(1)},\, \vec{H}_1=\sum_{k=1}^{\infty}(c^{+}{}_{k(1)}-c^{-}{}_{k(1)})\vec{h}_{k(1)}; \tag{6}$$

$$\vec{E}_4=\sum_{k=1}^{\infty}(c^{+}{}_{k(4)}+c^{-}{}_{k(4)})\vec{e}_{k(4)},\, \vec{H}_4=\sum_{k=1}^{\infty}(c^{+}{}_{k(4)}-c^{-}{}_{k(4)})\vec{h}_{k(4)}. \tag{7}$$

На рис. 4 показан фрагмент рекомпозиции автономных блоков в виде прямоугольных параллелепипедов. Первый автономный блок соединен со вторым, третий блок необходимо соединить с двумя первыми. Составим из клеток многоканальных матриц проводимости $\mathbf{Y}_A$ и $\mathbf{Y}_B$ сводную матрицу $\mathbf{Y}_C$. Для наглядности будем полагать, что виртуальные каналы Флоке, обозначенные цифрами, остаются несвязанными, а виртуальные каналы Флоке, обозначенные буквами, попарно соединены между собой. Объединение многомодовых объектов *A*, *B* осуществляется по виртуальным каналам Флоке, обозначенным β и γ.



а) *б*)

Рис. 4 Рекомпозиция дескрипторов автономных блоков: *а* – фрагмент оптического фильтра; *б* – декомпозиционная схема фрагмента

Представим сводную матрицу $\mathbf{Y}_C$ в виде клеток, разделенных горизонтальными и вертикальными прямыми:

$$Y_c=\begin{array}{cccccccc} & \beta & \gamma & 1 & 2 & 3 & ... \\ \beta & Y^{\beta\beta} & 0 & Y^{\beta 1} & Y^{\beta 2} & 0 & ... \\ \gamma & 0 & Y^{\gamma\gamma} & 0 & 0 & Y^{\gamma 3} & ... \\ 1 & Y^{1\beta} & 0 & Y^{11} & Y^{12} & 0 & ... \\ 2 & Y^{2\beta} & 0 & Y^{21} & Y^{22} & 0 & ... \\ 3 & 0 & Y^{3\gamma} & 0 & 0 & Y^{33} & ... \\ \vdots & ... & ... & ... & ... & ... & \end{array} \tag{8}$$

Клетки сводной матрицы $\mathbf{Y}_C$, в которых встречаются сочетания индексов, принадлежащих различным блокам, равны нулю. Совокупность индексов 1, 2, … обозначим через α, тогда выражение (8) можно записать более компактно:

$$Y_c = \begin{pmatrix} Y^{\beta\beta} & 0 & Y^{\beta\alpha} \\ 0 & Y^{\gamma\gamma} & Y^{\gamma\alpha} \\ Y^{\alpha\beta} & Y^{\alpha\gamma} & Y^{\alpha\alpha} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

На основании (9) в терминах клеточных матриц имеем следующие матричные уравнения:

$$\begin{aligned} b_\beta &= Y^{\beta\beta} \cdot a_\beta + Y^{\beta\alpha} \cdot a_\alpha; \\ b_\gamma &= Y^{\gamma\gamma} \cdot a_\gamma + Y^{\gamma\alpha} \cdot a_\alpha; \\ b_\alpha &= Y^{\alpha\beta} \cdot a_\beta + Y^{\alpha\gamma} \cdot a_\gamma + Y^{\alpha\alpha} \cdot a_\alpha. \end{aligned} \tag{10}$$

Наложим на матричные уравнения условия связи для локальных систем координат граней параллелепипеда (см. рис. 3) $a_\beta = a_\gamma, b_\beta = -b_\gamma$, что соответствует непрерывности касательных, составляющих $\vec{E}_\tau^A = \vec{E}_\tau^B, \vec{H}_\tau^A = \vec{H}_\tau^B$, на гранях сшивания автономных блоков, и исключим векторы $a_\beta, a_\gamma, b_\beta, b_\gamma$. После несложных преобразований имеем

$$b_\alpha = \left(Y^{\alpha\alpha} - \left(Y^{\alpha\beta} + Y^{\alpha\gamma} \right) \cdot \left(Y^{\beta\beta} + Y^{\gamma\gamma} \right)^{-1} \cdot \left(Y^{\gamma\alpha} + Y^{\beta\alpha} \right) \right) \cdot a_\alpha . \tag{11}$$

Таким образом, многоканальная и многомодовая матрица проводимости $\mathbf{Y}$, полученная в результате объединения объектов A, B, будет определяться как

$$Y = Y^{\alpha\alpha} - (Y^{\alpha\beta} + Y^{\alpha\gamma}) \cdot (Y^{\beta\beta} + Y^{\gamma\gamma})^{-1} \cdot (Y^{\gamma\alpha} + Y^{\beta\alpha}) . \tag{12}$$

Процесс рекомпозиции автономных блоков, которые описываются многоканальными и многомодовыми матрицами рассеяния, включает составление сводной матрицы $\mathbf{R}_C$, структура которой аналогична структуре сводной матрицы $\mathbf{Y}_C$ (9):

$$R_c = \begin{pmatrix} R^{\beta\beta} & 0 & R^{\beta\alpha} \\ 0 & R^{\gamma\gamma} & R^{\gamma\alpha} \\ R^{\alpha\beta} & R^{\alpha\gamma} & R^{\alpha\alpha} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

В терминах клеточных матриц имеем следующие матричные уравнения, связывающие падающие и отраженные волны в связанных виртуальных каналах:

$$\begin{aligned} c_\beta^- &= R^{\beta\beta} \cdot c_\beta^+ + R^{\beta\alpha} \cdot c_\alpha^+; \\ c_\gamma^- &= R^{\gamma\gamma} c_\gamma^+ + R^{\gamma\alpha} \cdot c_\alpha^+; \\ c_\alpha^- &= R^{\alpha\beta} \cdot c_\beta^+ + R^{\alpha\beta} \cdot c_\gamma^+ + R^{\alpha\alpha} \cdot c_\alpha^+. \end{aligned} \tag{14}$$

На матричные уравнения (14) не наложено никаких условий связи; написанные в развернутой форме эти уравнения, в сущности, распадаются на системы, каждая из которых характеризует объекты A, B. Наложим на уравнения (14) условия связи $c_\beta^+ = c_\gamma^-, c_\beta^- = c_\gamma^+$ и исключим из них векторы $c_\beta^+, c_\beta^-, c_\gamma^+, c_\gamma^-$. После несложных преобразований имеем

$$R = R^{\alpha\alpha} - (R^{\alpha\beta} R^{\alpha\gamma}) \cdot \begin{pmatrix} -R^{\beta\beta} & I \\ I & -R^{\gamma\gamma} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} R^{\beta\alpha} \\ R^{\gamma\alpha} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Рекомпозиция дескрипторов автономных блоков, описанных матрицами сопротивления, осуществляется по формуле, аналогичной (12):

$$Z = Z^{\alpha\alpha} + (Z^{\alpha\beta} + Z^{\alpha\gamma}) \cdot (Z^{\beta\beta} - Z^{\gamma\gamma})^{-1} \cdot (Z^{\gamma\alpha} - Z^{\beta\alpha}). \tag{16}$$

Краевое условие $\vec{E}_\tau = 0$ на гранях автономных блоков при использовании матрицы проводимости является фиксированным – оно не накладывается. Для автономного блока, описанного матрицей сопротивления, фиксированным является краевое условие $\vec{H}_\tau = 0$. Получим матричные выражения для наложения не фиксированных краевых условий.

Разделим матрицу проводимости **Y** автономного блока горизонтальной и вертикальной линиями на четыре клетки:

$$Y = \begin{array}{ccc} & l & \alpha \\ l & Y^{ll} & Y^{l\alpha} \\ \alpha & Y^{\alpha l} & Y^{\alpha\alpha} \end{array}. \tag{17}$$

Индексу l соответствуют грани автономного блока, на которых создается краевое условие $\vec{H}_\tau = 0$ (магнитная стенка), индексу α – грани, не подлежащие магнитному закорочению. В клеточных терминах на основании выражения (17) имеем следующие матричные уравнения:

$$\begin{aligned} b_l &= Y^{ll} \cdot a_l + Y^{l\alpha} \cdot a_\alpha; \\ b_\alpha &= Y^{\alpha l} \cdot a_l + Y^{\alpha\alpha} \cdot a_\alpha. \end{aligned} \tag{18}$$

Накладывая на матричные уравнения (18) условие $b_l = 0$, что эквивалентно $\vec{H}_\tau = 0$ на гранях блока, и исключая вектор a_l, определяем матрицу проводимости автономного блока:

$$Y = Y^{\alpha\alpha} - Y^{\alpha l} \cdot (Y^{ll})^{-1} \cdot Y^{l\alpha}. \tag{19}$$

Для автономного блока, который описывается матрицей сопротивления, для краевого условия $\vec{E}_\tau = 0$ (электрическая стенка) имеем аналогичное выражение

$$Z = Z^{\alpha\alpha} - Z^{\alpha l} \cdot (Z^{ll})^{-1} \cdot Y^{l\alpha}. \tag{20}$$

Краевые условия $\vec{E}_\tau = 0$ (электрическая стенка) и $\vec{H}_\tau = 0$ (магнитная стенка) для автономного блока, который описывается матрицей рассеяния **R**, накладываются так же, как и в случае матриц проводимости и сопротивления. При наложении краевых условий $\vec{H}_\tau = 0$ матрица рассеяния определяется матричным выражением

$$R = R^{\alpha\alpha} + R^{\alpha l} \cdot (I - R^{ll})^{-1} \cdot R^{l\alpha}, \tag{21}$$

при наложении краевых условий $\vec{E}_\tau = 0$ выражением

$$R = R^{\alpha\alpha} + R^{\alpha l} \cdot (I + R^{ll})^{-1} \cdot R^{l\alpha}. \tag{22}$$

На заключительном этапе матрица проводимости оптического фильтра преобразуется в матрицу рассеяния, из которой определяются коэффициенты отражения и пропускания

$$R = \frac{\left|c^-_{1(1)}\right|^2}{\left|c^+_{1(1)}\right|^2}, T = \frac{\left|c^-_{1(2)}\right|^2}{\left|c^+_{1(1)}\right|^2}, \ (R + T = 1). \tag{23}$$

Падающая волна $\vec{E}^0, \vec{H}^0$ и с ней поле дифракции подчинены теореме Флоке в форме [2]:

$$\begin{cases} \vec{E}(x+a,y,z) = \vec{E}(x,y,z)\exp(-i\varphi_x) \\ \vec{H}(x+a,y,z) = \vec{H}(x,y,z)\exp(-i\varphi_x) \\ \vec{E}(x,y+b,z) = \vec{E}(x,y,z)\exp(-i\varphi_y) \\ \vec{H}(x,y+b,z) = \vec{H}(x,y,z)\exp(-i\varphi_y) \end{cases}, \tag{24}$$

где $\varphi_x = \Gamma_n a\cos\alpha$, $\varphi_y = \Gamma_n b\cos\beta$; α, β – углы ориентации направления распространения волнового процесса (см. рис. 2). Угол падения θ с углами α и β связан соотношением $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\theta = 1$. Требованию (24) будет также удовлетворять система скалярных функций $\{u_{mn}\}$:

$$u_{mn} = C\exp\left(i\left(\frac{2\pi m + \varphi_x}{a}x + \frac{2\pi n + \varphi_y}{b}y - \Gamma_{mn}z\right)\right), \tag{25}$$

где $\Gamma_{mn} = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu - \chi_{mn}^2} = \sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu - \left(\frac{2\pi m + \varphi_x}{a}\right)^2 - \left(\frac{2\pi m + \varphi_y}{a}\right)^2}$, являющихся решениями уравнения Гельмгольца $\nabla_\perp^2 u_{mn} + \chi_{mn}^2 u_{mn} = 0$.

Построение векторных функций $\vec{E}_{mn}$, $\vec{H}_{mn}$ как *E*-волны при $\vec{E}_{mn}^z = \vec{z}_0 u_{mn}$ и как *H*-волны при $\vec{H}_{mn}^z = \vec{z}_0 u_{mn}$ проводилось по следующей методике.

Собственные волны канала Флоке определим из решения краевой задачи для уравнения Максвелла с периодическими условиями на стенках канала. Запишем уравнения Максвелла для гармонических колебаний [2]:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{H}_m &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}_m; \\ \mathrm{rot}\vec{E}_m &= -i\omega\mu_0\mu\vec{H}_m, \end{aligned} \tag{26}$$

где $\omega = 2\pi f$ – круговая частота колебаний; $\vec{E}_m$, $\vec{H}_m$ – амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей; ε, μ – относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости; ε_0, μ_0 – электрическая и магнитная постоянные.

Уравнения Максвелла (26) в прямоугольной декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial H_{my}}{\partial z} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{mx}, \\ \frac{\partial H_{mz}}{\partial x} - \frac{\partial H_{mx}}{\partial z} = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{my}, \\ \frac{\partial H_{my}}{\partial x} - \frac{\partial H_{mx}}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_{mz}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial E_{mz}}{\partial y} - \frac{\partial E_{my}}{\partial z} = -i\omega\mu_0\mu H_{mx}, \\ \frac{\partial E_{mz}}{\partial x} - \frac{\partial E_{mx}}{\partial z} = i\omega\mu_0\mu H_{my}, \\ \frac{\partial E_{my}}{\partial x} - \frac{\partial E_{mx}}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu H_{mz}; \end{cases} \tag{27}$$

здесь E_{mx}, E_{my}, E_{mz}, H_{mx}, H_{my}, H_{mz} – соответственно компоненты векторов электрического и магнитного полей $\vec{E}_m$ и $\vec{H}_m$.

Решение уравнений Максвелла (27) для бесконечно протяженного канала Флоке будем искать в виде плоской неоднородной волны [2]:

$$\vec{E}_m = \vec{E}(x,y)\exp(-i\Gamma z),\ \ \vec{H}_m = \vec{H}(x,y)\exp(-i\Gamma z), \tag{28}$$

где $\vec{E}(x,y), \vec{H}(x,y)$ – функции, характеризующие распределение электромагнитного поля на поперечном сечении канала Флоке; Γ – постоянная распространения волны в канале Флоке. Внося выражения (28) в системы уравнений (27), имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_z}{\partial y} + i\Gamma E_y = -i\omega\mu_0\mu H_x, \\ \dfrac{\partial E_z}{\partial x} + i\Gamma E_x = i\omega\mu_0\mu H_y, \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y} = -i\omega\mu_0\mu H_z; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial H_z}{\partial y} + i\Gamma H_y = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_x, \\ \dfrac{\partial H_z}{\partial x} + i\Gamma H_x = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_y, \\ \dfrac{\partial H_y}{\partial x} - \dfrac{\partial H_x}{\partial y} = i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, \end{cases} \tag{29}$$

где E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z – соответственно компоненты векторов $\vec{E}(x,y)$ и $\vec{H}(x,y)$.

В уравнениях (29) поперечные компоненты E_x, E_y, H_x, H_y можно выразить через продольные, т.е. E_z, H_z. Действительно, первая строка в левом столбце и вторая в правом – это система линейных алгебраических уравнений относительно E_y и H_x, а вторая строка в левом столбце и правом в первом – такая же система относительно E_x и H_y. Запишем решения этих алгебраических систем:

$$\begin{gathered} E_x = -\frac{i\Gamma}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial y};\ H_x = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{i\Gamma}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}; \\ E_y = -\frac{i\Gamma}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} + \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial x};\ H_y = -\frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{i\Gamma}{\chi^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{gathered} \tag{30}$$

Полученным выражениям (30) можно придать более компактный вид. Обозначая поперечные составляющие части векторов $\vec{E}(x,y)$, $\vec{H}(x,y)$ символами $\vec{E}_t$, $\vec{H}_t$:

$$\vec{E}_t = E_x\vec{i} + E_y\vec{j};\ \ \vec{H}_t = H_x\vec{i} + H_y\vec{j},$$

находим

$$\vec{E}_t = -\frac{i\Gamma}{\chi^2}\nabla_\perp\vec{E}_z - \frac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\mathrm{rot}_\perp\vec{H}_z;\ \ \vec{H}_t = \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\mathrm{rot}_\perp\vec{E}_z - \frac{i\Gamma}{\chi^2}\nabla_\perp\vec{H}_z, \tag{31}$$

где $\chi^2 = \omega^2\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu - \Gamma^2$; ∇ – оператор Лапласа; ⊥ – символ, который обозначает, что операция производится по координатам, лежащим в поперечной плоскости z = const, $\vec{E}_z = E_z\vec{k}, \vec{H}_z = H_z\vec{k}$; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – единичные орты, направленные соответственно вдоль координатных осей ox, oy, oz.

Поперечные компоненты электромагнитного поля плоской неоднородной волны состоят из двух частей (31), одна из которых обращается в нуль вместе с компонентой $\vec{E}_z$, а другая – с $\vec{H}_z$. Частный класс плоских неоднородных волн составляют такие, которые лишены продольной компоненты $H_z = 0$. Такие волны называются E-волнами (электрическими волнами) [2].

Положив в выражениях (31) $H_z = 0$, с учетом выражений (28) получаем следующие выражения для векторов поля для волн этого класса:

$$\begin{cases} \vec{E}_m = \left(\vec{E}_z - \dfrac{i\Gamma}{\chi^2}\nabla_\perp\vec{E}_z\right)\exp(-i\Gamma z); \\ \vec{H}_m = \dfrac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\mathrm{rot}_\perp\vec{E}_z\exp(-i\Gamma z), \end{cases} \tag{32}$$

Другой частный класс образуют плоские неоднородные волны без продольной электрической компоненты $E_z = 0$. Такие волны называются H-волнами (магнитные волны) [2]. Взяв в выражениях (31) $E_z = 0$, получаем

$$\begin{cases} \vec{E}_m = \dfrac{i\omega\mu_0\mu}{\chi^2}\operatorname{rot}_\perp \vec{H}_z \exp(-i\Gamma z); \\ \vec{H}_m = \left(\vec{H}_z - \dfrac{i\Gamma}{\chi^2}\nabla_\perp \vec{H}_z\right)\exp(-i\Gamma z). \end{cases} \tag{33}$$

Третий частный класс включает чисто поперечные волны $E_z = 0$, $H_z = 0$, которые называются TEM-волнами (поперечно-электромагнитные) [2]. Из выражений (31) видно, что если $E_z = 0$ и $H_z = 0$, то при $\chi^2 \neq 0$ обращаются в нуль все компоненты поля, а это значит, что TEM-волны не существуют. Однако данный запрет снимается при $\chi^2 \neq 0$, поскольку выражения всех поперечных компонент становятся при этом неопределенностями вида $\frac{0}{0}$, где 0 – бесконечно малые величины.

Поле TEM-волны можно рассматривать как предельный случай E-волны при $E_z \to 0$, $\chi \to 0$ или H-волны при $H_z \to 0$, $\chi \to 0$. Поэтому для TEM-волн на основании выражений (32) и (33) имеем следующие выражения:

$$\begin{cases} \vec{E}_m = \nabla_\perp \varphi \exp(-i\Gamma z); \\ \vec{H}_m = \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu_0\mu}}\left(\vec{k} \times \nabla_\perp \varphi\right)\exp(-i\Gamma z), \end{cases} \tag{34}$$

где $\varphi = \lim\limits_{E_z \to 0, \chi \to 0} \dfrac{-i\Gamma}{\chi^2} E_z$,

$$\begin{cases} \vec{E}_m = \sqrt{\dfrac{\mu_0\mu}{\varepsilon_0\varepsilon}}\left(\nabla_\perp \psi \times \vec{k}\right)\exp(-i\Gamma z); \\ \vec{H}_m = \nabla_\perp \psi \exp(-i\mathit{\Gamma} z); \end{cases} \tag{35}$$

здесь $\psi = \lim\limits_{H_z \to 0, \chi \to 0} \dfrac{-i\mathit{\Gamma}}{\chi^2} H_z$.

Преобразуем уравнения Максвелла (26). Применяя операцию rot к первому уравнению и подставляя в него второе уравнение, имеем

$$\operatorname{rot}\ \operatorname{rot}\vec{H}_m = \omega^2\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\mu\vec{H}_m . \tag{36}$$

Используя дифференциальные формулы векторного анализа [4], из уравнения (36) получаем

$$\operatorname{grad}\ \operatorname{div}\vec{H}_m - \nabla^2\vec{H}_m = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\vec{H}_m . \tag{37}$$

Применяя операцию div ко второму уравнению Максвелла и используя дифференциальные формулы векторного анализа [4], имеем

$$\operatorname{div}\vec{H}_m = 0 . \tag{38}$$

С учетом выражения (38) уравнение (37) имеет вид

$$\nabla^2\vec{H}_m + \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\vec{H}_m = 0 . \tag{39}$$

Дифференциальное уравнение (39) является уравнением электродинамики второго порядка. Аналогично можно получить дифференциальное уравнение второго порядка относительно $\vec{E}_m$:

$$\nabla^2\vec{E}_m + \omega^2\varepsilon_0\mu_0\varepsilon\mu\vec{E}_m = 0 . \tag{40}$$

Подставляя выражения (28) для плоских неоднородных волн в выражения (39) и (40), получаем двухмерные векторные уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} &\nabla_{\perp}^2 \vec{E}(x,y) + \chi^2 \vec{E}(x,y) = 0; \\ &\nabla_{\perp}^2 \vec{H}(x,y) + \chi^2 \vec{H}(x,y) = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

где $\chi^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon\mu - \Gamma^2$, которые применяются при изучении электромагнитных волн в волновых каналах Флоке. Каждое из векторных уравнений (41) эквивалентно трем скалярным относительно E_x, E_y, E_z и H_x, H_y, H_z. Поперечные компоненты волн E_x, E_y, H_x, H_y определяются через продольные E_z, H_z. Сформулируем и решим краевые задачи для уравнений Гельмгольца относительно E_z, H_z. Используя формулы (32)–(35), определим поперечные компоненты волн E_x, E_y, H_x, H_y.

Краевая задача для определения E_z формулируется в виде [5]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 E_Z(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 E_Z(x,y)}{\partial y^2} + \chi^2 E_Z(x,y) = 0 \\ E_Z\left(-\dfrac{a}{2}, y\right) = E_Z\left(\dfrac{a}{2}, y\right); E_Z\left(x, -\dfrac{b}{2}\right) = E_Z\left(x, \dfrac{b}{2}\right); \end{cases} \tag{42}$$

Решение краевой задачи (45) имеет вид [4]

$$E_Z = E_Z^{mn} = E_0 \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi m}{b}y\right)\right); \tag{43}$$

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...; n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

где E_0 – неопределенный амплитудный коэффициент; E_z^{mn} – собственные функции задачи (42); χ_{mn}^2 – собственные значения, т.е. значения параметра χ^2 в выражениях (42), при которых реализуются решения. Они составляют бесконечное множество, причем каждая из функций E_z^{mn} характеризует распределение продольной компоненты вектора $\vec{E}$ той или иной собственной волны на поперечном сечении канала Флоке. Подставляя выражения (43) в систему уравнений (32), получаем компоненты поля *E*-волн прямоугольного канала Флоке

$$\begin{cases} E_{mn}^z = E_0 \exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\Gamma z); \\ E_{mn}^x = E_0 \dfrac{\Gamma}{\chi^2}\dfrac{2\pi m}{a}\exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\Gamma z); \\ E_{mn}^y = E_0 \dfrac{\Gamma}{\chi^2}\dfrac{2\pi n}{b}\exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\Gamma z); \\ H_{mn}^x = -E_0 \dfrac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\dfrac{2\pi n}{b}\exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\Gamma z); \\ H_{mn}^y = -E_0 \dfrac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\dfrac{2\pi m}{a}\exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\Gamma z); \end{cases} \tag{44}$$

где $\Gamma = \Gamma_{mn} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon\mu - \left(\dfrac{2\pi m}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{2\pi n}{b}\right)^2}$ – постоянная распространения *E*-волны.

На основании системы уравнений (34) при $m = 0$, $n \to 0$ или $n = 0$, $m \to 0$ поле E-волны переходит в поле TEM-волны. Например, при $n = 0$, $m \to 0$ поле TEM-волны имеет следующую структуру:

$$\begin{cases} E_{mx} = E_0 \Gamma \exp(-i\Gamma z); \\ E_{my} = E_0 \omega \varepsilon_0 \varepsilon \exp(-i\Gamma z); \end{cases}$$

где $\Gamma = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}$.

Краевая задача для определения H_z формулируется в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 H_z(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 H_z(x,y)}{\partial y^2} + \chi^2 H_z(x,y) = 0 \\ H_Z\left(-\dfrac{a}{2}, y\right) = H_Z\left(\dfrac{a}{2}, y\right); H_Z\left(x, -\dfrac{b}{2}\right) = H_Z\left(x, \dfrac{b}{2}\right). \end{cases}$$

Решение краевой задачи имеет вид [6]

$$H_z = H_z^{mn} = H_0 \exp\left(i\left(\frac{2\pi m}{a}x + \frac{2\pi n}{b}y\right)\right); \tag{45}$$

$$\chi^2 = \chi_{mn}^2 = \left(\frac{2\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n}{b}\right)^2,\ m = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Подставляя выражения (45) в систему уравнений (33), получаем компоненты поля H-волн прямоугольного канала Флоке

$$\begin{cases} H_{mn}^z = H_0 \exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\mathit{\Gamma} z); \\ H_{mn}^x = H_0 \dfrac{\mathit{\Gamma}}{\chi^2}\dfrac{2\pi m}{a}\exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\mathit{\Gamma} z); \\ H_{mn}^y = H_0 \dfrac{\mathit{\Gamma}}{\chi^2}\dfrac{2\pi n}{b}\exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\mathit{\Gamma} z); \\ E_{mn}^x = H_0 \dfrac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\dfrac{2\pi n}{b}\exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\mathit{\Gamma} z); \\ E_{mn}^y = -H_0 \dfrac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\chi^2}\dfrac{2\pi m}{a}\exp\left(i\left(\dfrac{2\pi m}{a}x + \dfrac{2\pi n}{b}y\right)\right)\exp(-i\mathit{\Gamma} z); \end{cases} \tag{46}$$

где $\mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}_{mn} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu - \left(\dfrac{2\pi m}{a}\right)^2 - \left(\dfrac{2\pi n}{b}\right)^2}$ – постоянная распространения H-волны.

Выражения (44) и (46) являются собственными волнами прямоугольного канала Флоке с краевыми условиями (рис. 5):

$$\begin{aligned} &\vec{E}\left(-\frac{a}{2}, y\right) = \vec{E}\left(-\frac{a}{2}, y\right)\exp(-i\varphi_x), \vec{H}\left(-\frac{a}{2}, y\right) = \vec{H}\left(-\frac{a}{2}, y\right)\exp(-i\varphi_x), \\ &\vec{E}\left(x, -\frac{b}{2}\right) = \vec{E}\left(x, \frac{b}{2}\right)\exp(-i\varphi_y), \vec{H}\left(x, -\frac{b}{2}\right) = \vec{H}\left(x, \frac{b}{2}\right)\exp(-i\varphi_y). \end{aligned} \tag{47}$$

На рис. 6 показана расчетная и экспериментальная спектральная характеристика коэффициента пропускания одиннадцатислойного узкополосного фильтра α-Si/SiO_2. Конструкция выбрана с $\lambda/2$-низкопреломляющим слоем внутри набора из четвертьволновых чередующихся слоев с высоким и низким показателем преломления, т.е. структура представляла собой фильтр Фабри–Перо. У такого фильтра коэффициент отражения высок, а коэффициент пропускания мал для всех длин волн, кроме узкого диапазона.

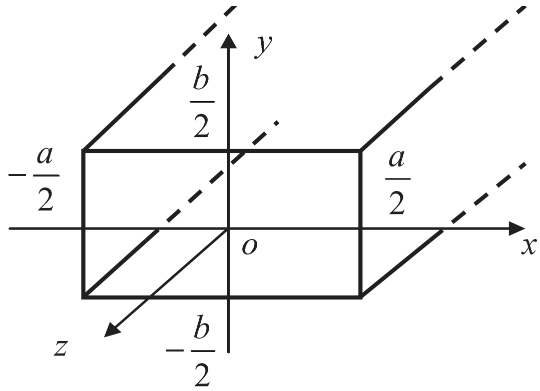


Рис. 5. Прямоугольный канал Флоке: *a*, *b* – размеры волновода

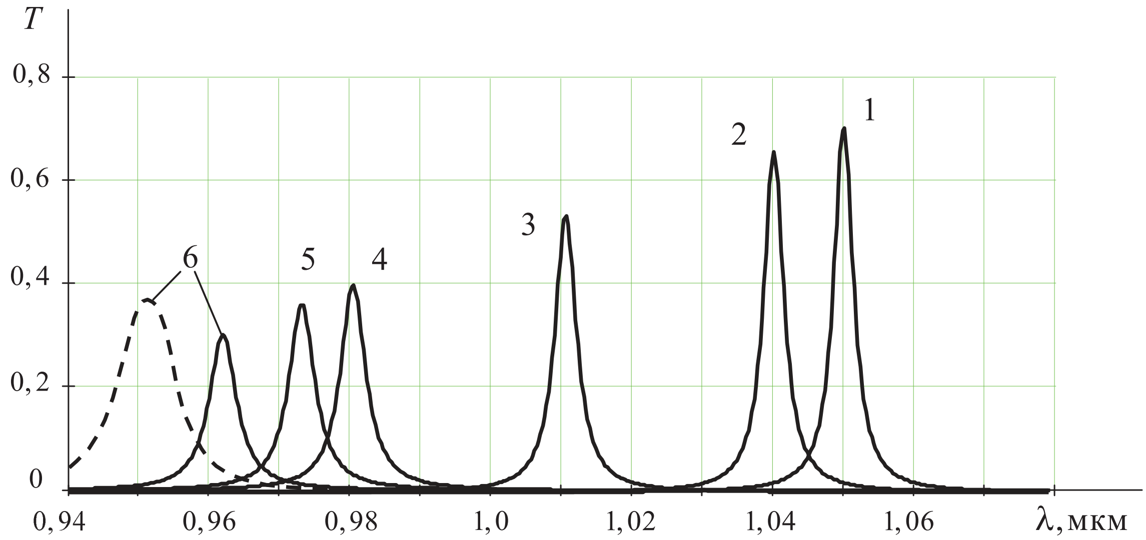


Рис. 6. Угловая зависимость коэффициента *T* пропускания одиннадцатислойного узкополосного фильтра α-Si/SiO$_2$: кривая 1 – $\theta = 0°$; 2 − $\theta = 15°$; 3 − $\theta = 30°$;4 − $\theta = 40°$; 5 − $\theta = 42°$; 6 − $\theta = 45°$; здесь: —— – одномерная электродинамическая модель; - - - - – эксперимент [6]; nd = $\lambda/4$ = 0,2625 мкм

Наиболее широко распространенная технология изготовления диэлектрических покрытий оптического фильтра – электронно-лучевое испарение, которое на длину покрытия ΔL = 300 нм дает отклонение от расчетных значений толщины покрытия порядка $Z_{\max}$ = 3…5 нм. Это и является основной причиной расхождения экспериментальных результатов с теоретическими результатами.

На рис. 7 показаны реализации случайного коэффициента пропускания одиннадцатислойного узкополосного фильтра α-Si/SiO$_2$ при среднеквадратичных отклонениях толщины диэлектрических покрытий $\sigma_{h_i} = \sigma_{l_i} = 4$ нм. Реализации получены с помощью трехмерной электродинамической модели. Резонансные длины волн являются случайными величинами. В результате статистической обработки по 20 реализациям получены следующие результаты.

Математическое ожидание значения резонансной длины волны равно $\lambda^{M}_{\text{рез}} = 0{,}961$ мкм, среднеквадратичное отклонение $\sigma_{\lambda_{\text{рез}}} = 0{,}0073$ мкм. Эти результаты согласуются с экспериментальными и теоретическими результатами, показанными на рис. 6.

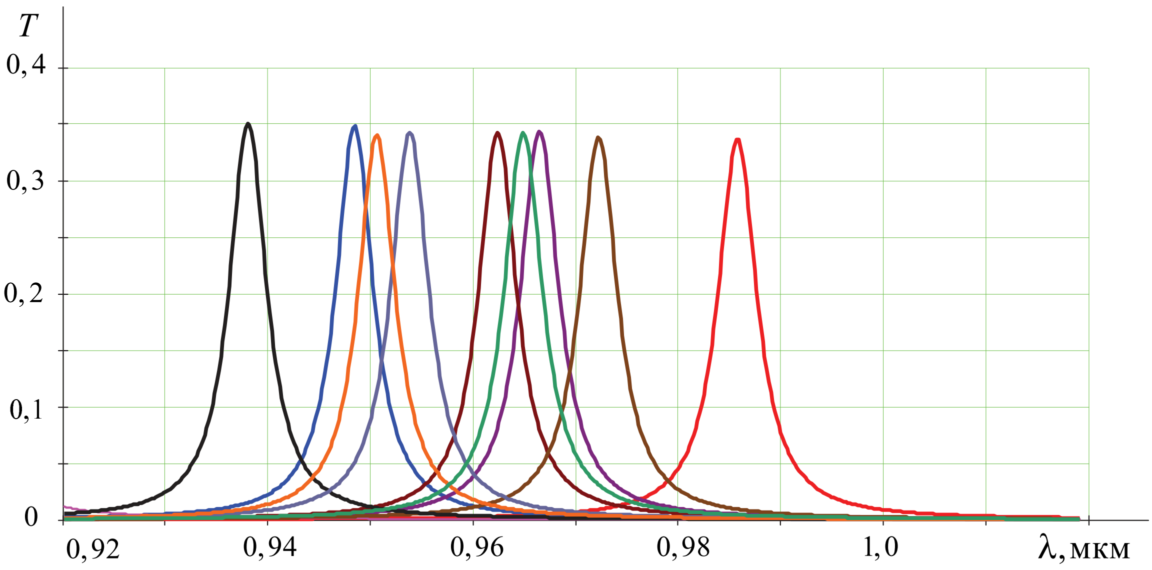


Рис. 7. Реализации случайного коэффициента пропускания одиннадцатислойного узкополосного фильтра: $\theta = 45°$; $\sigma_{h_i} = \sigma_{l_i} = 4$ нм

Список литературы

1. Никольский, В. В. Электродинамика и распространение радиоволн / В. В. Никольский, Т. И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.
2. Никольский, В. В. Проекционный метод для незамкнутых электродинамических систем / В. В. Никольский // Радиотехника и электроника. – 1971. – Т. 16, № 8. – С. 1342.
3. Чиркина, М. А. Математическое моделирование устройств сверхвысоких частот на магнитных нанокомпозитах / М. А. Чиркина, Н. К. Юрков, А. Н. Якимов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2011. – № 11. – С. 166–175.
4. Корн, Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1974. – 701 с.
5. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1972. – 437 с.
6. Ершов, А. В. Многослойные оптические покрытия / А. В. Ершов, А. И. Машин. – Нижний Новгород, 2006. – 99 с.

УДК 623.4.055

Пимкин, А. Д.

Математическое моделирование оптических фильтров Фабри–Перо при наклонном падении электромагнитной волны / А. Д. Пимкин // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 2. – С. 27–39.

Пимкин Александр Дмитриевич
заместитель командира,
в/ч 38994,
Москва, Кремль, 9

A. Pimkin
deputy commander,
VCh 38994,
Moscow, the Kremlin, 9

Аннотация. Предложена математическая модель дифракции плоской однородной электромагнитной волны на двумерно периодической структуре под произвольным углом. Разработана методика преобразования матрицы проводимости на примере интерференционного фильтра Фабри–Перо в базисе каналов Флоке автономных блоков. Для определения коэффициентов отражения и пропускания фильтра дано математическое описание процедуры пре-

Abstract. A mathematical model of the diffraction of a plane electromagnetic wave on a uniform two-dimensional periodic structure at an arbitrary angle. The technique of pre-form a matrix of conductivity on the example of interference filter Fabry-Perot in the basis of channels Floquet autonomous units. To determine the reflection and transmission coefficients filter gives a mathematical description of Procedure of the transformation matrix of the conductivity in the scattering maобразования матрицы проводимости в матрицу рассеяния. Полученные расчетные спектральные характеристики коэффициентов пропускания одиннадцатислойного узкополосного фильтра Фабри–Перо имеют удовлетворительную сходимость с экспериментальными данными.

Ключевые слова: интерференционный фильтр Фабри–Перо, плоская однородная электромагнитная волна, дифракция, математическое моделирование, коэффициенты отражения и пропускания.

trix. Obtained calculated the spectral characteristics of the transmittance odinnadtsatisloynogo narrowband filter Fabry-Perot have satisfactory agreement with the experimental data

Key words: interference filter Fabry-Perot plane homogeneous electromagnetic wave diffraction, mathematical modeling, reflection and transmission coefficients.